VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 35 | April 1992 | No. 2

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 35, No. 2, 1992

किसी फलन का उसके नार्लुण्ड माध्यों द्वारा सन्निकटन की कोटि के विषय में

आशुतोष पाठक तथा वीरेन्द्र गुप्त
गणित अध्ययनशाला, विक्रमविश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—नवम्बर 24, 1990]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में एक सन्निकटन की कोटि के विषय में एक प्रमेय सिद्ध की जावेगी जो अन्य ज्ञात परिणामों की अपेक्षा अधिक उत्तम है।

Abstract

On the degree of approximation of a function by its Norlund means, *By* Ashutosh Pathak and Virendra Gupta, School of Studies in Maths., Vikram University, Ujjain (M. P.).

In the present note we prove a theorem on the degree of approximation which is better than the other known result in this line.

1. परिभाषा (गास[2]) : श्रेणी Σan आंशिक योगफलों $\{S_n\}$ के अनुक्रम के साथ नार्लुण्ड माध्यों $(N,\overset{\alpha}{p_n})\alpha \geqslant 1$ के द्वारा S तक संकलनीय है यदि

$$\lim \overset{\alpha}{t_n} \to S, \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\overset{\alpha}{t_n} = \frac{1}{\overset{\alpha}{p_n}} \sum_{v=0}^{n} \overset{\alpha}{p}_{n-v} \; S_v \tag{1.2}$$

$$p_n^{\alpha} = \sum_{v=0}^{n} p_v^{\alpha} \tag{1.3}$$

तथा

$p_n > 0$, समस्त $n \geqslant 0$ के लिए

$\alpha = 1$ के लिए यह विधि संकलन की (N, p_n) विधि में समानीत हो जाती है। यदि $p_n = \frac{1}{n+1}$, तो विधि (N, p_n) विदित हार्मोनिक संकलनीयता $\left(N, \frac{1}{n+1}\right)$ बन जाती है।

यही नहीं, चूंकि
$$p_n = \binom{n+\delta-1}{\delta-1}, \ \delta > 0 \tag{1.4}$$

अतएव उपर्युक्त विधि (c, δ) माध्यमों में समानीत हो जाती है।

2. माना कि $f(x)$ एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्त 2π है और लेवेस्क अर्थ में अन्तराल $[-\pi, \pi]$ में समाकलनीय है।

इस फलन से सम्बद्ध फूरिये श्रेणी निम्नवत् है—

$$f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.1}$$

जहाँ
$a_n, b_n, n = 1, 2 \ldots\ldots,$

$f(x)$ के फूरियर त्रिकोणमितीय गुणांक हैं।

हम लिखेंगे कि

$$\phi(t) = \phi(x,t) = f(x,t) + f(x-t) - 2f(x) \tag{2.2}$$

$$\phi(t) = \int_0^t |\phi(u)| \, du \tag{2.3}$$

$$p(1/t) = p_e \tag{2.4}$$

जहाँ τ सूचित करता है $1/t$ के समाकलनीय अंश को।

फलन $f(x) \epsilon$ lip α, $0<\alpha<1$, के संगत फूरियर श्रेणी के विषय में लोरेंज ने निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त किया है—

प्रमेय A : यदि $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx,$$

जहाँ $a_n \downarrow 0$ तो

$$f(x) \epsilon \text{ lip } \alpha, 0<\alpha<1,$$

यह अनिवार्य तथा पर्याप्त है कि

$$a_n=0\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \tag{2.5}$$

स्पष्ट है कि यह $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ के लिए भी वैध है। गास[2] ने इस प्रमेय का सार्वीकरण निम्न रूप में किया है—

प्रमेय B : माना कि $a_n>0$, तथा a_n फूरियर साइन या कोसाइन गुणांक हैं f के तब $f \epsilon$ lip α, के लिए $0<\alpha<1$, (2.6)

यदि $\sum_{k=1}^{n} a_n=0\ (n^{-\alpha})$ या उसके ही समतुल्य

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k=0\ (n^{-1-\alpha}) \tag{2.7}$$

यह देखना आसान है कि $a_n \downarrow 0$ तो प्रतिबन्ध (2.5), (2.6) एवं (2.7) समतुल्य है।

प्लेट[2] ने किसी फलन के सन्निकटन की कोटि के विषय में निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध किया है।

प्रमेय C : माना $0<\alpha<1$, $0<\delta<\pi$, यदि x ऐसा बिन्दु है कि

$$\int_0^t |d\phi(u)| < At^\alpha, \text{ for } 0\leqslant t<\leqslant\delta$$

तो

$$\overset{\alpha}{\sigma_n}(x)-f(x)=0\,(n^{-\alpha}) \tag{2.8}$$

हाल ही में सिद्दीकी[6] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है जो फ्लेट के परिणाम को सार्वीकृत करता है।

प्रमेय D : माना कि $\{p_n\}$ एक ऐसा अवर्धमान अनुक्रम है असली संख्याओं का कि

$$\int_t^\xi F_n(u)du=0\left[\frac{p(1/t)}{n}\right],\ \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant\xi \tag{2.9}$$

जहाँ $F_n(t)=I_m\{e^{i(n+1/2)t}+\sum_{v=0}^{n} p_v e^{-ivt}\}$

साथ ही, माना $0<\alpha<1$, $0<\delta\leqslant\pi$, तथा यदि x ऐसा बिन्दु है कि

$$\int_0^t |d\phi(u)| \leqslant At^\alpha \tag{2.10}$$

जहाँ $0\leqslant t\leqslant\delta$ तो

$$\sigma_n(x)-f(x)=0\,(P_n-\alpha)+0\,[1/p_n] \tag{2.11}$$

इस परिणाम में संशोधन करके पोरवाल ने[5] इससे अच्छा सिद्दिकी[6] का परिणाम प्राप्त किया। उसने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की—

प्रमेय E : यदि
$$\psi(x,t)=\int_t^\delta |\phi(u)|\,\frac{p(1/u)}{u}\,du=0(1) \tag{2.12}$$

जहाँ $\{p_n\}$ धनात्मक तथा अवर्धमान अनुक्रम है वास्तविक संख्याओं का।

तो
$$t_n(x)-f(x)=0\left(\frac{1}{p_n}\right) \tag{2.13}$$

x में समान रूप से लागू होता है।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करेंगे जो पोखाल[5] के प्रमेय को सार्वीकरण करता है।

हम निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय :

यदि
$$\psi(x,t)=\int_t^\delta |\phi(u)| \frac{p^{\alpha}_{(1/u)}}{u}\, du=0(1) \tag{2.14}$$

जहाँ $\{p^\alpha\}$ एक धनात्मक तथा अवर्धमान अनुक्रम है असली अंकों का, तो

$$t^{\alpha}_{n}(x)-f(x)=0\left[\frac{1}{p^{\alpha}_{n}}\right] \text{ जहाँ } \alpha>-1$$

$\alpha=1$ के लिए उपर्युक्त प्रमेय पोरवाल[5] का प्रमेय है।

4. इस प्रमेय की उपपत्ति निम्नलिखित प्रमेयिकाओं पर आधारित है—

प्रमेयिका 1. यदि $\left\{p^{\alpha}_{n}\right\}$ अनृण हैं तथा अवर्धमान अनुक्रम हो तो $0\leqslant a\leqslant b\leqslant\infty, 0\leqslant t\leqslant\pi,$

तथा किसी n के लिए

$$\left|\sum_{k=a}^{b} p^{\alpha}_{k}\, e^{i(n-k)t}\right|<kp^{\alpha}_{(1/t)}$$

जहाँ k परम नियतांक है। प्रमेयिका की उपपत्ति मौकफैडेन[3] के अनुसार है।

प्रमेयिका 2 : यदि $\left\{p^{\alpha}_{n}\right\}$ अनृण तथा अवर्धमान अनुक्रम हो तो $1/n\leqslant t\leqslant\delta<\pi,$

के लिए

$$|K_n(t)|=\left|\sum_{k=0}^{n} p^{\alpha}_{k}\frac{\sin(n-k+1/2)}{\sin t/2}\right|$$

$$=0[t^{-1}p^{\alpha}_{(1/t)}]$$

उपपत्ति के लिए देखें पाण्डेय[4]।

प्रमेय की उपपत्ति :—यह सुविदित है कि

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\,\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin 1/2t}\,dt$$

जहाँ $S_n(x)$ सूचक है श्रेणी (2.1) के n वें आंशिक योग का जो इस तरह है

$$f(x)\sim 1/2a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

अब $\left(N,p_n^{\alpha}\right)$ माध्य की परिभाषा से

$$t_n^{\alpha}-f(x)=\frac{1}{p_n^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}p_k^{\alpha}\,S_{n-k}(x)-f(x)$$

$$=\frac{1}{p_n^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}p_k^{\alpha}\,[S_{n-k}(x)-F(x)]$$

$$=\frac{1}{2\pi p_n^{\alpha}}\int_0^{\pi}\phi(t)\sum_{k=0}^{n}p_k^{\alpha}\,\frac{\sin(n-k+1/2)t}{\sin 1/2\,t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi p_n^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\pi}\phi(t)p_k^{\alpha}\,\frac{\sin(n-k+1/2)t}{\sin 1/2\,t}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\phi(t)K_n(t)\,dt$$

जहाँ

$$K_n(t)=\frac{1}{2\pi p_n^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}p_k^{\alpha}\,\frac{\sin(n-k+1/2)t}{\sin 1/2t}$$

हम लेंगे

$$I=\int_0^{\pi} \phi(t)K_n(t)\,dt$$

$$=\left[\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right]\phi(t)K_n(t)dt,\ 0<\delta<\pi$$

$$=I_1+I_2+I_3 \text{ (माना)}$$

अब $\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant\delta$ के लिए

$$K_n(t)=\frac{1}{\pi \overset{\alpha}{p_n}}\ 0\left[\sum_{k=0}^{n} \overset{\alpha}{p_k}\ \frac{\sin(n+k+1/2)t}{\sin 1/2t}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi \overset{\alpha}{p_n}}\ 0\left[t^{-1}\ \overset{\alpha}{p}_{(1/t)}\right]$$

$$=0\left[\frac{p(1/t)}{t\overset{\alpha}{p_n}}\right] \text{ (प्रमेयिका 2 द्वारा)}$$

इसलिए

$$I_2=0\left(\int_{1/n}^{\delta}\frac{|\phi(u)|}{u}\ \frac{\overset{\alpha}{p}_{(1/u)}}{\overset{\alpha}{p_n}}\,du\right)$$

$$=0\left(\frac{1}{\overset{\alpha}{p_n}}\right) \text{ (परिकल्पना 2.14 से)} \qquad (4.2)$$

यही नहीं, रीमान-लेबेस्क प्रमेय के बल पर तथा नियमितता प्रतिबन्धों के अनुसार हमें निम्न की प्राप्ति होती है

$$I_3=0\left(\frac{1}{\overset{\alpha}{p_n}}\right) \qquad (4.3)$$

साथ ही, प्रतिबन्ध

$$\phi(u)=\int_{1/n}^{\delta}\frac{\phi(u)}{u}\ \overset{\alpha}{p}_{(1/u)}=0(1)$$

का अर्थ है कि

$$\psi(t)=\int_0^t |\phi(u)|du$$

$$=0\left(\frac{t}{p^{\alpha}_{(1/t)}}\right)$$

माना

$$\frac{\phi(u)}{u}\; p^{\alpha}_{(1/u)}=\phi(u)$$

क्योंकि

$$\psi(t)=\int_0^t \frac{u}{p^{\alpha}_{(1/u)}}\; \frac{\left\{(u)p^{\alpha}_{(1/u)}\right\}}{u}\,du$$

$$=\int_0^t \frac{u}{p^{\alpha}_{(1/u)}}\; \frac{\phi(u)}{u}\, p^{\alpha}_{(1/u)}\,du$$

खण्डश: समाकलन करने पर

$$(t)=p_{(1/t)}[-u\phi(u)]^t+\int_0^t \phi(u)\left\{\frac{d}{du}\left[u/p^{\alpha}_{(1/u)}\right]\right\}du$$

$$=0\left[\frac{t}{p^{\alpha}_{(1/t)}}\right]+0(1)\left[\frac{t}{p^{\alpha}_{(1/t)}}\right]$$

$$=\left[\frac{t}{p^{\alpha}_{(1/t)}}\right]$$

पुन: $0\leqslant t\leqslant 1/n$, के लिए $K_n(t)=0(n)$

अत:

$$I_1=0\left[\int_0^{1/n} n\frac{t}{p^{\alpha}_{(1/t)}}\,dt\right]=0\left(\frac{1}{p^{\alpha}_n}\right)$$

इस तरह

$$I_1=0\left(\frac{1}{p^{\alpha}_n}\right) \tag{4.4}$$

(4.2), (4.3), एवं (4.4) को मिलाने पर

$$I=0\left(\frac{1}{p_n^{\alpha}}\right)$$

इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोध प्रपत्र की तैयारी में प्रो० जी० एस० पाण्डेय, अध्यक्ष स्कूल आफ स्टडीज इन मैथ-मैटिक्स, विक्रम विश्वविद्यालय से जो सुझाव मिले उसके लिए लेखकगण उनके आभारी हैं।

निर्देश

1. फ्लेट, O. S. Math., 1956, 7, 87-95.
2. गाँस, Math. E., 1969, 112, 357-63.
3. मैकफैडेन एल०, ड्यूक मैथ० जर्नल, 1942, 9, 168-207.
4. पाण्डेय, जी० एस०, इण्डियन जर्नल प्योर ऐप्लाइड मैथ०, 1977, 8, 412-417.
5. पोरवाल, जे० पी०, पी-एच० डी० थीसिस, उज्जैन विश्वविद्यालय, 1975.
6. सिद्दीकी, जे० ए०, प्रोसी० इण्डियन एके० साइंस, 1948, 28, 527-31.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 35, No. 2, 1992

फूरिये-लागेर श्रेणी की चिजारो परम संकलनीयता

सुशील शर्मा तथा साधना मिश्रा

गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, झाबुआ

[प्राप्त—अप्रैल 20, 1992]

सारांश

इस शोध पत्र में हम फलन $f(x)$ को बिन्दु $x=0$ पर फूरिये-लागेर श्रेणी पर प्रथम कोटि चिजारो परम संकलनीयता से सम्बन्धित एक सरल प्रमेय सिद्ध करेंगे ।

Abstract

Absolute Cesaro summability of Fourier-Laguerre series. *By* S. Sharma and S. Mishra, Department of Mathematics, Government P. G. College, Jhabua (M. P.).

In the present paper we discuss the absolute Cesaro summability of order one for Fourier-Laguerre series associated with a Lebesgue- measurable function at the point $x=0$ of the interval $(0, \infty)$.

1. फलन $f(x)$ से सम्बन्धित फूरिये-लागेर श्रेणी निम्नलिखित है—

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(x) \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n} a_n = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha f(x) L_n^{(\alpha)}(x)\, dx. \tag{1.2}$$

क्योंकि

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n},$$

इसलिये

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(0) = \{\Gamma(\alpha+1)^{-1}\} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-y} y^\alpha f(y) L_n^{(\alpha)}(y)\, dy. \tag{1.3}$$

यह सरलता से देखा जा सकता है कि[1] श्रेणी $\Sigma u_n(x)$ जिसके nवें आंशिक योगफलों का अनुक्रम $\}S_n\}$ है, बिन्दु x पर संकलनीय $|C, n|$ होगी, यदि

$$\Sigma \frac{1}{n} |S_n(x)-\mathrm{A}|<\infty. \tag{1.4}$$

2. बिन्दु $x=0$ पर श्रेणी (1.1) की साधारण चिजारो संकलनीयता पर कागबेतलियांज[3] और जेगो [4,5] का कार्य उल्लेखनीय है। इसी श्रेणी की प्रथम कोटि चिजारो परम संकलनीयता से सम्बन्धित एक सरल परिणाम दिया जा रहा है।

$\phi(y)$ के द्वारा हमने फलन

$$\{\Gamma(\alpha+1)\}^{-1} e^{-y} [f(y)-A] y^{\alpha} \tag{2.1}$$

को दर्शाया है और चौधरी[2] ने निम्न प्रमेय सिद्ध की—

प्रमेय A

$-1<\alpha<-\frac{1}{2}$ के लिये बिन्दु $x=0$ पर श्रेणी (1.1) संकलनीय $|C, 1|$ होगी, यदि

$$\phi(t)=\int_0^t |\phi(y)|\, dy=O(t^{\alpha/2+3/4}),\ t\to 0 \tag{2.2}$$

$$\int_w^n |\phi(y)|\, e^{y/2}\, y^{-\alpha/2-3/4}\, dy=O(1), \tag{2.3}$$

$$\int_n^\infty |\phi(y)|\, e^{y/2}\, y^{-\alpha/2-7/12}\, dy=O(1) \tag{2.4}$$

हम चौधरी[2] के प्रमेय में (2.2) तथा (2.3) का उपयोग नहीं करते हुए एवं दुर्बल स्थिति में प्रमेय A को सिद्ध करेंगे। हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय

$-1<\alpha<-\frac{1}{2}$ के लिये बिन्दु $x=0$ पर श्रेणी (1.1) संकलनीय $|C, 1|$ होगी, यदि

$$|\phi(y)|=O(y^{\alpha}) \tag{2.5}$$

एवं

$$\int_n^\infty |\phi(y)|\, e^{y/2}\, y^{-\alpha/2-7/12}\, dy=O(1) \tag{2.6}$$

3. प्रमेय को सिद्ध करने के लिये हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1:[(5), 175]

माना कि α स्वेच्छ वास्तविक संख्या है तथा C और w धनात्मक नियत अचर हैं, तो जैसे जैसे $n \to \infty$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} x^{(\alpha/2-1/4)} O(n^{\alpha/2-1/4}), & c/n \leqslant x \leqslant w \\ o(n^{\alpha}), & o \leqslant x \leqslant c/n; \end{cases}$$

प्रमेयिका 2 [(5), 238]

यदि α स्वेच्छ वास्तविक तथा $w>0, 0<\eta<4$ है तो जैसे जैसे $n \to \infty$

$$\max e^{-x/2} x^{\alpha/2+1/4} |L_n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} n^{\alpha/2-1/4}, & w \leqslant x \leqslant (4-\eta)\, n; \\ n^{\alpha/2-1/12}, & x \geqslant w. \end{cases}$$

4. प्रमेय की उपपत्ति

श्रेणी (1.1) का बिन्दु $x=0$ पर nवाँ आंशिक योगफल

$$S_n = \{T(\alpha+1)^{-1} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} f(y) \sum_{m=0}^{m-n} L_m^{(\alpha)}(y)\, dy,$$

$$= \{T(\alpha+1)\}^{-1} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} f(y) \quad L_n^{(\alpha+1)}(y)\, dy. \tag{4.1}$$

$f(0)=A$ लिखने पर और लागेर बहुपदों के लाम्बिक गुण का उपयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$S_n - A = \int_0^{\infty} \phi(y) \quad L_n^{(\alpha+1)}(y)\, dy.$$

हम समाकलन के परिसर को निम्न चार भागों में बाँटेंगे :

$$S_n - A - \int_0^{c/n} + \int_{c/n}^{w} + \int_{w}^{n} + \int_{n}^{\infty}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \text{ माना कि}$$

जहाँ w एक धनात्मक नियत अचर है।

अब

$$|I_1| = O(1) \int_0^{c/n} |\phi(y)| \quad |L_n^{(\alpha+1)}(y)|\, dy$$

$$=O(^{\alpha+1}) \int_0^{c/n} |\phi(y)|\, dy$$

$$=O(n^{\alpha+1}) \int_0^{c/n} y^{\alpha}\, dy \quad (2.5 \text{ के अनुसार}$$

$$=O(n^{\alpha+1}) \quad (n^{-\alpha-1}),$$

$$=O(1) \tag{4.3}$$

पुनः प्रमेयिका 1 का उपयोग करने पर

$$|I_2|=O(n^{\alpha/2+1/4} \int_{c/n}^{w} |\phi(y)|\, y^{-\alpha/2-3/4}\, dy$$

$$=O(n^{\alpha/2+1/4}) \int_{c/n}^{w} y^{\alpha}\, y^{-\alpha/2-3/4}\, dy$$

$$=O(n^{\alpha/2+1/4}) \left[y^{\alpha/2-3/4+1}\right]_{c/n}^{w}$$

$$=O(n^{\alpha/2+1/4}) \quad (n^{-\alpha/2-1/6})$$

$$=O(1) \tag{4.4}$$

अब, प्रमेयिका 2 का उपयोग करने पर

$$|I_5|=O(n^{\alpha/2+1/4}] \int_{w}^{n} |\phi(y)|\, e^{y/2}\, y^{-\alpha/2-3/4}\, dy$$

$$=O(n^{\alpha/2+1/4}) \left[y^{\alpha/2-3/4+1}\right]_{w}^{n}$$

$$=O(n^{\alpha/2+1/4}) \quad (n^{\alpha/2+1/4})$$

$$=O(n^{\alpha+1/2})$$

$$=O(1)$$

जहाँ

$$-1<\alpha<^{-1)2} \tag{4.5}$$

अन्त में प्रमेयिका 2 के दूसरे भाग से

$$|I_4|=O(n^{\alpha/2+5/12})\int_{n}^{\infty} |\phi(y)|\, e^{y/2}\, y^{-\alpha/2-3/4}\, dy$$

$$=O(n^{\alpha/2+5/12})\int_0^\infty |\phi(y)|\frac{e^{y/2-\alpha/2-7/12}}{y^{1/6}}\,dy$$

$$=O(n^{\alpha/2+1/4})\int_n^\infty |\phi(y)|\,e^{y/2}\,y^{-\alpha(2-7/12}\,dy$$

$=O(n^{\alpha/2+1/4})$, (2.4) के अनुसार

$$=O(1) \tag{4.6}$$

(4.3), (4.4), (4.5), (4.6) को मिलाने पर

$$|S_n-A|=O(1)$$

प्राप्त होता है, जिसके फलस्वरूप यह स्पष्ट है कि

$$\sum_{n=1}^{n=m}\frac{|S_n-A|}{n}=O(1) \text{ क्योंकि } \alpha<-1/2$$

इस प्रकार प्रमेय उपपन्न हो जाता है।

निर्देश

1. भट्ट, एस० एन०, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, 1959, 2, 73-74
2. चौधरी, आर० एस०, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, 1975, 18, 85-88
3. कागबेतलियांज, सी० आर० एकेडेमी साइन्स पेरिस, 1931, 193, 386-389
4. झेगो, जी०, मैथ०जर्न०, 1926, 25, 87-115
5. झेगो, जी०, Orthogonal Polynomial, 1959

Vinana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 35, No. 2, 1992

वाहित अवमल की विभिन्न मात्राओं का फसलों की वृद्धि पर प्रभाव

शिवगोपाल मिश्र तथा सुनील दत्त तिवारी
शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—जनवरी 1, 1992]

सारांश

घरेलू वाहित अवमल का फसलों पर प्रभाव का अध्ययन करने हेतु कई प्रयोग किये गये। इसमें अवमल की जिन विभिन्न मात्राओं का प्रयोग किया गया, वे थीं 20 टन, 30 टन, 50 टन और 70 टन प्रति हेक्टेयर। उपचारित प्रक्षेत्रों में चार फसलें ज्वार, पालक, चौलाई और तिल क्रमशः उगाई गयीं। इन प्रयोगों के द्वारा यह पाया गया कि ज्वार और तिल की फसल पर अवमल का हानिकारक प्रभाव सबसे कम पड़ा है। तत्पश्चात् पालक का स्थान है। भारी धातुओं द्वारा संदूषण की दृष्टि से तिल सबसे सुरक्षित फसल पायी गयी क्योंकि इस फसल द्वारा भारी धातुओं का सबसे कम अवशोषण हुआ है।

Abstract

Effect of different doses of sludge on crop growth. *By* S. G, Misra and Sunil Dutt Tiwari, Sheila Dhar Institute of Soil Science, Uuiversity of Allahabad, Allahabad.

Field experiments were conducted to study the effect of different doses of sludge on crop growth. The applied amounts of sludge were 20, 30, 50 and 70 tons per hectare. Sorghum, spinach, lettuce and sesame were grown successively. It was found that harmful effect of sludge is less on sorghum and sesame crop. Spinach is at second place. Sesame is safe because the uptake of heavy metals by this crop is minimum out of the four crops taken from the same plots.

पहले खेती के लिए पशुओं का मल-मूत्र, पौधों के अवशेष और अन्य कार्बनिक पदार्थों का उपयोग मिट्टी की उर्वरा शक्ति को बनाये रखने के लिये किया जाता था। कुछ समय पश्चात् विभिन्न स्रोतों से निकलने वाले मल जल (Sewage) और अर्ध ठोस पदार्थ अवमल (Sludge) की ओर भी लोगों का ध्यान गया। धीरे-धीरे इस अवमल के प्रयोग में भी वृद्धि होने लगी। इसकी गुणवत्ता इस बात में है कि इसमें नाइट्रोजन और फास्फोरस तत्व पर्याप्त मात्रा में उपलब्ध रहते हैं। बड़े पैमाने पर इसके उपयोग का कारण यह है कि यह पर्याप्त मात्रा में और कम खर्च पर उपलब्ध है।

इस अवमल का एक दूसरा पक्ष भी है। विश्लेषणों द्वारा पाया गया है कि इसमें पौधों के लिये आवश्यक नाइट्रोजन और फास्फोरस के अलावा कुछ भारी धातुएँ भी पायी जाती हैं जो पौधों द्वारा अवशोषित होने पर उनकी वृद्धि तथा उपज पर बुरा प्रभाव डालती हैं। ऐसा भी पाया गया है कि दीर्घ काल तक इसके प्रयोग से मिट्टी में इन भारी धातुओं का संचय होने लगता है जिससे मिट्टी संदूषित हो सकती है। हर्म्स और ब्रूमर[1] के अनुसार मृदा पी० एच 4-8 तक कार्बनिक पदार्थों के द्वारा भारी धातुओं की उपलब्धता बढ़ती है परन्तु जब कार्बनिक पदार्थ की अधिक मात्रा का प्रयोग करते हैं तो इनकी उपलब्धता घटती है।

ये भारी धातुएँ कई प्रकार से हानिकारक सिद्ध हो सकती हैं। ये पौधों द्वारा अवशोषित होकर उनकी उपापचयी क्रियाओं को प्रभावित कर सकती हैं। पौधे की कोशिकाओं में एकत्र होकर खाद्यश्रृंखला में प्रवेश कर सकती हैं तथा मनुष्यों और पशुओं में विभिन्न रोगों का कारण बन सकती हैं। इसके अतिरिक्त अवमल में उपस्थित सम्पूर्ण नाइट्रोजन उपलब्ध रूप में रहता है जिससे पौधे द्वारा सम्पूर्ण नाइट्रोजन का प्रयोग न होने पर वह वर्षा के द्वारा घुलकर तालाबों, झीलों और अन्य जलागारों में पहुँच कर उन्हें सुपोषण (Eutrophication) के द्वारा मछलियों के रहने के अनुपयुक्त बना सकता है। नाइट्रोजन भौम जल में पहुँच कर पेयजल में नाइट्रेट की मात्रा बढ़ा सकता है जिसके द्वारा पीने पर रोग होने की आशंका बढ़ जाती है। अवमल की कितनी मात्रा पौधों और मिट्टी के लिये सुरक्षित है और इसकी विभिन्न मात्राओं का पौधों की वृद्धि एवम् विकास पर क्या प्रभाव पड़ता है—इन समस्याओं पर प्रकाश डालने के उद्देश्य से प्रस्तुत अध्ययन किया गया।

प्रयोगात्मक

ज्वार, पालक, चौलाई और तिल की फसलों पर अवमल का प्रभाव जानने के लिये शीलाधर मृदा विज्ञान प्रक्षेत्र में प्रयोग किये गये। इन प्रयोगों में प्रति हेक्टेयर प्रक्षेत्र में अवमल (सूखा) की चार मात्राएँ, 20, 30, 50 और 70 टन प्रयुक्त की गयीं। फसलों के जैवभार क्रमशः 40, 50, 60 और 150 दिनों के बाद ज्ञात किये गये। परिणाम सारणी 1 में दिये गये हैं। शुष्क भार में जिन भारी धातुओं की मात्राएँ ज्ञात की गयीं वे हैं : Cr, Cd, Pb तथा Fe। ये मात्राएँ एटामिक ऐब्जार्प्सन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर (AAS) के द्वारा ज्ञात की गयीं। ये परिणाम सारणी 2 में दिये गये हैं।

प्रयुक्त अवमल शीलाधर मृदा विज्ञान प्रक्षेत्र के सामने से बह रहे नाले से एकत्र करके, सुखाकर, छानकर प्रक्षेत्र में डाला गया। इसका विश्लेषण भारी धातुओं और कार्बन के लिये किया गया। इसका

संघटन इस प्रकार था—कार्बनिक कार्बन 3.24%; क्रोमियम (Cr) 16.50 पी० पी० एम०, कैडमियम (Cd) 25.50 पी० पी० एम०, लेड (Pb) 33.50 पी० पी० एम० और आयरन (Fe) 309.25 पी० पी० एम० ।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 से यह स्पष्ट है कि अवमल की विभिन्न मात्राएँ फसलों के ऊपर अलग-अलग प्रभाव डालती हैं । ज्वार की फसल का जैवभार अन्य फसलों की तुलना में सर्वाधिक है । ज्वार की उपज प्रति वर्गमीटर सर्वाधिक हुई । उसके बाद तिल का स्थान था । पत्तीदार तरकारी की फसल पालक का जैवभार सामान्य दशाओं में प्राप्त जैवभार से अधिक है ।

सारणी 1

उपचार/वर्ग मीटर	जैव भार ग्राम/वर्ग मीटर			
	ज्वार	पालक	चौलाई	तिल
कन्ट्रोल	2060	310	400	670
2.0 कि० ग्रा० अवमल	2330	—	—	—
3.0 कि० ग्रा० अवमल	3030	610	540	—
5.0 कि० ग्रा० अवमल	—	650	600	1110
7.0 कि० ग्रा० अवमल	—	—	—	1130

सारणी 2 से स्पष्ट है कि विभिन्न फसलों द्वारा अवशोषित भारी धातुओं में क्रोमियम, कैड-मियम और लेड मुख्य हैं । इन भारी धातुओं को सर्वाधिक मात्रा में अवशोषित करने वाली फसलें ज्वार, पालक और चौलाई हैं । उल्लेखनीय है कि ज्वार, पालक और चौलाई में कैडमियम और लेड की मात्रा विषाक्तता स्तर से अधिक है । यह भी स्पष्ट है कि अवमल की बढ़ती मात्रा से एक स्तर तक भारी धातुओं का अवशोषण अधिक है परन्तु एक सीमा के बाद इनका अवशोषण कम हुआ है । अवमल की सर्वाधिक मात्रा (7 कि० ग्रा०/मी^{2}) प्रयोग करने पर भी भारी धातुओं का अवशोषण तिल की फसल में सबसे कम है ।

स्पष्ट है कि अवमल की अधिक मात्रा का उपयोग फसलों में भारी धातुओं के अवशोषण को कम करता है । सम्भवतः ऐसा इसके कोलाइडी गुण के कारण एवम् कार्बनिक पदार्थ के प्रति भारी धातुओं के लिये आकर्षण के कारण है । इसी तरह के परिणाम हाजसन[4] को भी मिले हैं । साथ ही यह भी पाया गया कि जहाँ पर भारी धातुओं का अवशोषण का अधिक हुआ है वहां पर फसलों के जैवभार में कमी आई और जहाँ पर अवशोषण कल हुआ वहाँ जैवभार बढ़ा है । इससे स्पष्ट है कि भारी धातुएँ पादप-पोषण में बाधक हैं ।

सारणी 2

फसलों द्वारा ग्रहण की गई भारी धातुओं की मात्रा (भाग प्रति दशलक्षांश)

उपचार/वर्गमीटर	Cr	Cd	Pb	Fe
		ज्वार		
नियन्त्रण	×	0.05	2.40	231.60
2.0 कि०ग्रा० अवमल	7.69	27.01	4.17	346.20
3.0 कि०ग्रा० अवमल	8.19	27.03	8.24	360.40
5,0 कि०ग्रा० अवमल	—	—	—	—
7.0 कि०ग्रा० अवमल	—	—	—	—
		पालक		
नियन्त्रण	×	0.07	0.63	229.4
2.0 कि०ग्रा० अवमल	—	—	—	—
3.0 कि०ग्रा० अवमल	2.32	20.47	12.37	280.69
5,0 कि०ग्रा० अवमल	4.89	24.36	18.37	290.74
7.0 कि०ग्रा० अवमल	—	—	—	—
		चौलाई		
नियन्त्रण	×	0.45	0.79	115.7
2.0 कि०ग्रा० अवमल	—	—	—	—
3.0 कि०ग्रा० अवमल	6.27	16.23	16.17	185.70
5.0 कि०ग्रा० अवमल	8.94	18.43	19.37	190.97
7.0 कि०ग्रा० अवमल	—	—	—	—
		तिल		
नियन्त्रण	0.50	1.04	0.89	110.80
2.0 कि०ग्रा० अवमल	—	—	—	—
3.0 कि०ग्रा० अवमल	—	—	—	—
5.0 कि०ग्रा० अवमल	0.50	2.29	2.34	112.90
7.0 कि०ग्रा० अवमल	0.76	3.19	3.14	119.88

निर्देश

1. हर्म्स०, यू० तथा ब्रूमर, जी० "Influence of different types of Natural Organic Matter on the Solubility of Heavy Metals in Soils," in Procee, "Environl, Effect of org. and inorg·contaminants in Sewage-Sludge." held on May 25-26 1982 at Stevenage.

2. हाजसन, जे० एफ०, Chemistyy of the Micronutrient Element in Soils. Advances in Agronomy 1963, **15**, 119-160.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 35, No. 2, 1992

गामा किरण उपचारित कुसुम में उत्तरजीविता का अध्ययन

बनारसी यादव तथा हृदय कुमार
आनुवंशिकी एवं पादप प्रजनन विभाग,
कृषि विज्ञान संस्थान, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—मार्च 16, 1992]

सारांश

कुसुम की जीवनक्रिया पर प्रेरित उत्परिवर्तन के प्रभाव का अध्ययन करने हेतु उसकी सात विभिन्न प्रजातियों को गामा किरण की 30 KR मात्रा से उपचारित किया गया। प्रजातियाँ एच० यू० एस० 260 (85.63 प्रतिशत उत्तरजीवी) तथा एन० एस० 668-1 (58.46 प्रतिशत उत्तरजीवी) किरणन के प्रति क्रमशः ज्यादा अवरोधी एवं संवेदनशील रहीं। बड़े बीज वाली प्रजातियाँ छोटे बीज की प्रजातियों की अपेक्षा किरणन के प्रति अधिक अवरोधी पायी गयीं।

Abstract

Study of survival in gamma irradiated safflower. *By* B. Yadav and H. Kumar Department of Genetics and Plant Breeding Institute of Agricultural Sciences, Banaras Hindu University, Varanasi.

With a view to study the bioiogical response of induced mutation, the seeds of seven diverse cultivars of safflower (*carthamus tinctorius* L.) were treated wiht 30 KR gamma ray. Cultivars HUS 260 (85.63% viable) and NS 668-1(58.46% viable) were most resistant and sensitive to the irradiation respectively. Large seeded cultivars were more resistant to the irradiation than the small seeded ones.

जीवनक्रिया पर उत्परिवर्तजों के प्रभाव का अध्ययन अंकुरण एवं उत्तरजीविता के परिप्रेक्ष्य में बहुत सी फसलों पर किया गया है तथा अंकुरण एवं परिपक्वता के समय उत्तरजीविता उत्परिवर्तजों के प्रभाव का मुख्य मापदण्ड भी माना जाता रहा है। बहुत सी फसलों पर प्रयोग से यह परिणाम निकला है कि उत्परिवर्तजों की सान्द्रता बढ़ने के साथ ही उत्तरजीविता क्रमशः घटती है।[1,2,3] कुछ अन्य

प्रयोगों से यह निष्कर्ष निकला है कि उत्परिवर्तजों के प्रयोग से अंकुरण तो अप्रभावी हो सकता है परन्तु उत्तरजीविता अवश्य ही प्रभावित होती है।[4] अत: किरणन के अध्ययन के लिये उत्तरजीविता अधिक प्रभावी मापदण्ड हो सकती है।

गास्चाव[5] एवं ब्लीस्ट तथा गास्चाव[6] के मतानुसार उत्परिवर्तजों का अधिक विषाक्त प्रभाव उत्परिवर्तन एवं प्रजनन अनुसन्धान में महत्वपूर्ण स्थान रखता है। अत: प्रस्तुत शोध में गामा किरण की उचित मात्रा (30 KR) का प्रयोग किया गया। उत्परिवर्तजों की उचित मात्रा का प्रयोग बहुत से वैज्ञानिकों द्वारा संस्तुत है।[7,8,9,10,11] कुसुम में गामा किरणन के अतिरिक्त कोल्चीसीन के प्रयोग से यह परिणाम निकला है कि बड़े बीज वाली प्रजातियों में छोटे बीज वाली प्रजातियों की अपेक्षा उत्तरजीविता अधिक होती है।[12] अत: उपर्युक्त तथ्यों को ध्यान में रखकर लेखकों ने कुसुम की विभिन्न प्रजातियों के अंकुरण एवं उत्तरजीविता पर गामा किरणन के प्रभाव का अध्ययन किया। प्रस्तुत शोधपत्र में कुसुम की सात विभिन्न बीज आकार वाली एवं तेल मात्रा की प्रजातियों की जीवन क्रिया पर गामा किरणन द्वारा प्रेरित उत्परिवर्तन का अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रयोगात्मक अध्ययन हेतु कुसुम की सात विभिन्न प्रजातियों (टी० 65, एच० यू० एस० 304, एन० एस० 668-1, बी० एल० वाई० 642, एच० यू० एस० 260, एच० यू० एस० 219 एवं एच० यू० एस० 29-ए) के स्वस्थ बीजों को गामा किरण की 30 KR सान्द्रता पर कोबाल्ट^{60} द्वारा 1000 प्रति मिनट की दर से भारतीय कृषि अनुसन्धान परिषद, नयी दिल्ली में उपचारित किया गया। सभी प्रजातियाँ आनुवंशिकी एवं पादप प्रजनन विभाग, कृषि विज्ञान संस्थान, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी द्वारा उपलब्ध करायी गयीं। इन सातों प्रजातियों से उपचारित बीज शोध प्रक्षेत्र कृषि विज्ञान संस्थान, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी में उगाये गये। उपचारित बीजों के साथ ही सभी प्रजातियों के अनुपचारित बीज भी समान मात्रा में उगाये गये।

अंकुरण के अध्ययन के लिए बुआई के पन्द्रह दिन के बाद सभी अंकुरित पौधों की गणना की गयी तथा उपचारित पौधों की प्रतिशत संख्या अनुपचारित के सापेक्ष निकाली गयी। उत्तरजीविता के अध्ययन हेतु सातों प्रजातियों में फसल के पकने पर समस्त जीवित पौधों की गणना करके अनुपचारित के सापेक्ष उत्तरजीविता का संगणन किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

प्राप्त परिणाम यह दर्शाता है कि गामा किरणन का प्रभाव प्रजाति विशिष्ट है (सारिणी 1 एवं 2)। विभिन्न प्रजातियों पर गामा किरण के प्रयोग से यह निष्कर्ष निकलता है कि छोटे बीजों वाली प्रजातियाँ गामा किरणन के प्रति अधिक संवेदनशील हैं। इन्हीं प्रजातियों पर कोल्चीसीन के प्रयोग से भी इसी प्रकार का परिणाम प्राप्त हो चुका है।[12]

अंकुरण पर गामा किरणन का प्रभाव

यद्यपि विभिन्न प्रजातियों पर गामा किरणन का प्रभाव अलग-अलग रहा, परन्तु प्रजाति एन० एस० 668-1 सबसे अधिक प्रभावी रही। इस प्रजाति में अंकुरण सबसे कम (62.96%) रहा, जबकि बड़े बीज वाली प्रजातियाँ बी० एल० वाई० 642 (80.46%) एवं एच० यू० एस० 260 (80.73%) सबसे कम प्रभावी रहीं (सारणी 1)। सभी प्रजातियों में एन० ए० 668-1 सबसे छोटे बीज आकार एवं बी० एल० वाई० 642 सबसे बड़े बीज आकार की प्रजाति है। इसी प्रकार के परिणाम अन्य फसलों में पहले भी प्राप्त हुए हैं।[13]

उत्तरजीविता पर गामा किरणन का प्रभाव

प्रयोग से प्राप्त परिणाम यह दर्शाता है कि सभी प्रजातियों की उत्तरजीविता पर गामा किरणन का प्रभाव अलग-अलग रहा। बी० एल० वाई 642 तथा एच० यू० एस० 260 प्रजातियाँ गामा किरणन के प्रति सबसे कम संवेदनशील रहीं (सारणी 2)। इन प्रजातियों का बीज आकार सामान्यतः अन्य प्रजातियों की अपेक्षा बड़ा था। कुसुम की इन्हीं प्रजातियों पर कोल्चीसीन के उपचार से भी यह पाया गया है कि बड़े बीज वाली प्रजातियों में उत्तरजीविता छोटे बीज वाली प्रजातियों की अपेक्षा अधिक होती है।[12]

सारणी 1

कुसुम की विभिन्न प्रजातियों के अंकुरण पर गामा किरण उपचार का प्रभाव

प्रजाति	अंकुरण (%)		अंकुरण (%)	100—
	अनुपचारित	गामा किरण उपचारित	अनुपचारित के सापेक्ष	बीज भार (ग्राम)
टी० 65	90.00	54.66	60.73	4.64
एच० यू० एस० 304	86.33	58.66	67.95	4.93
एस० एस० 668-1	90.00	56.66	62.96	4.08
बी० एल० वाई० 642	85.33	63.66	80.46	5.04
एच० यू० एस० 260	90.00	72.66	80.73	5.28
एच० यू० एस० 219	85.66	65.33	76.27	4.26
एच० यू० एस० 29-ए	93.33	63.33	67.86	4.15

सारणी 2

कुसुम की विभिन्न प्रजातियों की उत्तरजीविता पर गामा किरण उपचार का प्रभाव

प्रजाति	उत्तरजीविता (%)		जीवित %	100—
	अनुपचारित	गामा किरण उपचारित	अनुपचारित के सापेक्ष	बीज भार (ग्राम)
टी० 65	86.66	57.33	66,16	4.64
एच० यू० एस० 304	80.00	62.66	78.33	4.93
एन० एस० 668-1	86.66	50.66	58.46	4.08
बी० एल० वाई० 642	83.33	67.33	80.80	5.04
एच० यू० एस० 260	80.00	68.66	85.63	5.28
एच० यू० एस० 219	86.66	62.33	71.92	4.26
एच० यू० एस० 29-ए	83.33	58,66	70.93	4.15

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में बनारसी वादव विश्वविद्यालय अनुदान आयोग का आभारी है जिसने इस कार्य की अवधि में छात्रवृत्ति प्रदान की ।

निर्देश

1. सिंह, एस० एस० एन० तथा गोडवार्ड, एम० बी० ई०, जे० साइटोल० जेनेट०, 1972, 3, 80-91
2. शर्मा, एस० के० तथा शर्मा, बी०, अप्लायड जेनेटिक्स, 1986, 71, 820-825
3. खन्ना, बी० के० तथा मेहरचन्दानी, एन०, इण्टरनेशनल चिकपी न्यूजलेटर, 1981, 5, 8-9
4. बारघेस, जी० तथा स्वामीनाथन, एम० एस०, इण्डियन जर्नल आफ जेनेटिक्स, 1968, 28, 158-165
5. गास्चाक, डब्लू०, इयूफाइरिका, 1970, 21, 91-97
6. ब्लीस्ट, एस० तथा गास्चाक, डब्लू०, एग्रिक० हार्ट० जेनेट०, 1975, 33, 33-85

7. लाल, जे० तथा श्रीनिवासचर, डी०, **थियोर एप्लायड जेनेटिक्स**, 1979, **54**, 27-32

8. शाह, जी० आर०, मुखर्जी, पी० तथा सिंह, आर० बी०, **जे० साइटोल० ऐण्ड जेनेटिक्स**, 1980, **15**, 81-85

9. रिछारिया, ए० के०, **पी० एच० डी० थिसिस** (एग्रीकल्चर), बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी 1981

10. मर्सीकुट्टी, वी० सी०, **पी० एच० डी० थिसिस**, (एग्रीकल्चर), बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी वाराणसी 1983

11. निगम, नीना तथा कुमार, एच०, **जेनेटिका इवेरिका**, 1984, 36, 291

12. बनारसी यादव, हृदय कुमार तथा प्रमोद कुमार चौबे, **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1991, **34**, 155-160

13. सिंह, दिनेश, **पी-एच० डी० थिसिस** (एग्रीकल्चर), बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी 1987

Vjnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 35, No. 2, 1992

टेसला-उत्तेजन के अन्तर्गत नाइट्रस ऑक्साइड का वैद्युत अपघटन

जगदीश प्रसाद

रसायन विभाग, मेरठ कालिज, मेरठ

[प्राप्त—अप्रैल 24, 1991]

सारांश

सीमेन्ज ओजोनित्र में 6-44 मिमी Hg 29°C परास में नाइट्रस ऑक्साइड के 20 kc/s के 2.04 kV विभव द्वारा अपघटन के अध्ययन से पता लगा है कि आरम्भिक अवस्थाओं में अपघटन शून्य कोटि का और अन्तिम अवस्थाओं में प्रथम-कोटि का होता है। अपघटन के दौरान विसर्जन-धारा स्थिर रहती है। अपघटन-दर तथा विसर्जन-धारा का परिमाण टेसला-विसर्जन के मानों की अपेक्षा निम्न आवृत्ति के विसर्जन के मान अधिक थे; तथा पहले वाले में दीप्ति की तीव्रता अपेक्षाकृत कम थी। टेसला-उत्तेजन द्वारा अपघटन के दौरान किसी भी स्थिति में, किसी भी प्रकार का, जोशी प्रभाव $\pm\Delta i$ प्रेक्षित नहीं हुआ। $\pm\Delta i$ की अनुपस्थिति से नाइट्रोजन के उच्च ऑक्साइडों की निर्मिति की कम सम्भावना होने का निष्कर्ष निकाला गया है। विसर्जन-नली की दीवारों पर द्वितीयक इलेक्ट्रॉनों के आंशिक उदासीकरण को टेसला-उत्तेजन के अन्तर्गत अपघटन की मंदगति का कारण माना गया है।

Abstract

Electrical decomposition of nitrous oxide under tesla excitation. *By* Jagdish Prasad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

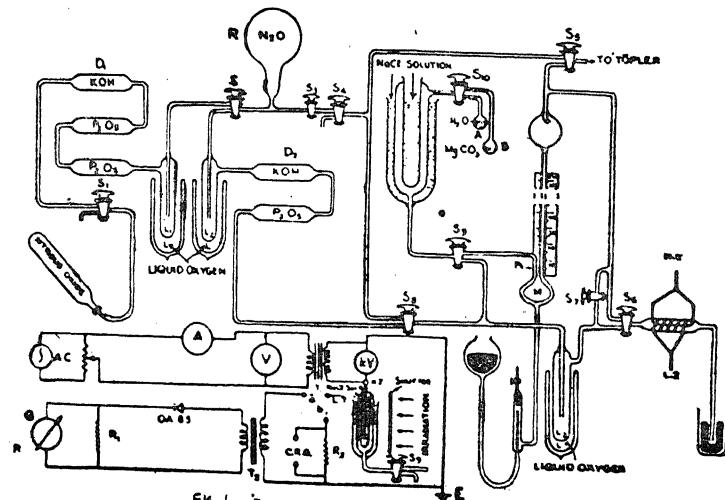
Decomposition of nitrous oxide studied in the pressure range 6 to 44 mm Hg 29°C in a Siemens' ozonizer at 2.04 kV with 20 k c/s follows zero order in the initial stages and first order towards end. The discharge current remained constant during the decomposition. Decomposition rate and the magnitude of the discharge current were larger under low frequency excitation than under tesla discharge. Also the intensity of the glow was less under the latter. No Joshi effect $\pm\Delta i$ was observed during any stage of the decomposition under tesla

excitation. From the absence of $\pm\Delta i$, the less probable formation of higher oxides of nitrogen was inferred. The slow rate of decomposition under tesla excitation has been ascribed to the partial neutralisation of secondary electrons on the walls of the discharge tube.

110 k c/s द्वारा टेसला-उत्तेजन के अन्तर्गत 8 से 20 kV परास में नाइट्रस ऑक्साइड के व्यवहार का स्टीवार्डसन[1,2] ने अध्ययन किया। 70 सेमी० लम्बे गैस-स्तम्भ में परिबद्ध 0.2-3 मिमी० परास में गैस को, विसर्जन-नली के बाह्य सिरों पर लगे स्लीव-इलेक्ट्रोडों की सहायता से अध्ययन किया गया। अत: प्रयुक्त व्यापारिक तथा निम्न आवृत्तियों के समान क्रियाशील कारकों की अवस्था में टेसला-उत्तेजन द्वारा ओजोनित्र विसर्जन में अपघटन के तुलनात्मक अध्ययन को रुचिकर पाया गया।

प्रयोगात्मक

पूर्व प्रकाशित अध्ययन[3] के समान, निम्न आवृत्ति के विभवों के उत्तेजन से, सीमेन्ज ओजोनित्र के वलयाकार स्थान में विसर्जन उत्पन्न किया गया। वैद्युत परिपथ तथा सामान्य प्रयोगात्मक समायोजन चित्र 1 के अनुसार था। इसमें मुख्य रूप से उच्च आवृत्ति वाला ट्रान्सफार्मर युक्त एक टेसला-वलय था जिसके आद्य तारों के पथ में एक स्फुलिग-अन्तराल, धारिता तथा प्रेरकत्व लगा था, आद्य तार द्वितीयक तारों के साथ गाढ़ युग्मित थे; द्वितीयक तारों में से एक को ओजोनित्र की आन्तरिक नली से सम्बद्ध कर दिया गया था तथा दूसरे सिरे को सीधा भू-सम्पर्कित कर दिया गया था। धारा संसूची परिपथ पूर्व[3] के समान था। आवृत्ति मापने के लिये ओसिलोग्राफ को प्रयुक्त किया गया जिसकी यथार्थता $\pm 10\%$ थी। 2.04 kV के स्थिर अनुप्रयुक्त विभव पर, भिन्न-भिन्न समयों पर, धारा तथा प्रारम्भिक गैस-दाब

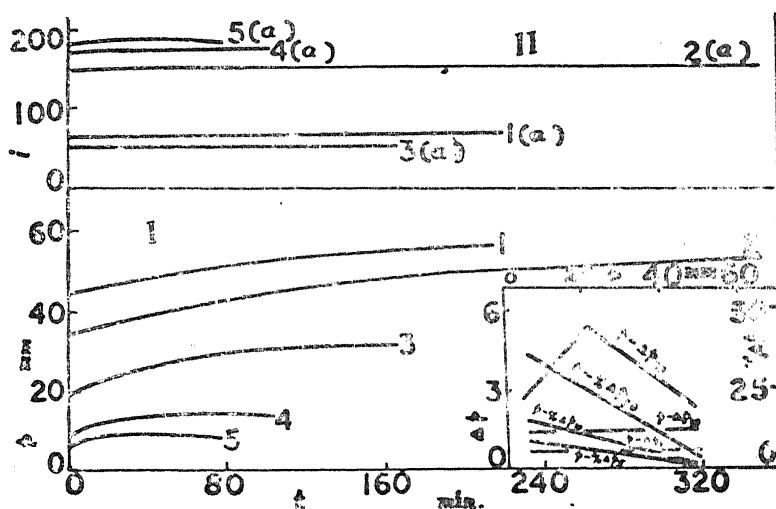
चित्र 1 : नाइट्रस ऑक्साइड का वैद्युत अपघटन

p_0 से स्थिर होने तक अपघटन को मापा गया। अपघटन के अध्ययन के दौरान, निकाय का जोशी प्रभाव $\pm\Delta i$ के लिये परीक्षण किया गया। 6 से 44 मिमी० दाब-परास में प्राप्त अपघटन-परिणाम चित्र 2 में प्रदर्शित हैं।

सारणी 1

5 तथा 10 मिनट के विसर्जन से प्राप्त नेट तथा आपेक्षिक दाब-वृद्धि

kV	p(mm)	Δp_5	Δp_{10}	$\%\Delta p_5$	$\%\Delta p_{10}$
4.44, 50 c/s	7	3.5	3.5	50	50
0.3, 500 c/s	7	2.2	3.2	31	46
0.88, 1700 c/s	7	3.5	3.5	50	50
0.9, 2000 c/s	6	3.0	3.0	50	50
2.04, Tesla (20 k c/s)	6	1.2	2.2	20	37

परिणाम तथा विवेचना

अभिक्रिया के पूर्ण होने में लगने वाला समय प्रारम्भिक दाब के साथ बढ़ता जाता है (चित्र 2)। दाब की नेट वृद्धि Δp प्रारम्भिक दाब पर निर्भर नहीं है, जबकि आपेक्षिक दाब वृद्धि $\%\Delta p$ दाब के अनुक्रमानुपाती है। लगभग समान प्रारम्भिक गैस-दाब 7 मिमी० पर अपघटन की दरों की तुलना से

चित्र 2 : 2.04 kV, 20 k c/s, 29°C पर टेसला विसर्जन के दौरान नाइट्रस ऑक्साइड का वैद्युत अपघटन (उपचित्र : 5, 10 तथा 30 मिनट बाद p तथा Δp में सम्बन्ध)

ज्ञात होता है कि टेसला-उत्तेजन की तुलना में निम्न आवृत्ति-उत्तेजन से अपघटन तीव्रतर है (सारणी 1) अपघटन के दौरान विसर्जन-धारा का मान स्थिर रहा। किसी भी स्थिति में किसी भी प्रकार के जोशी प्रभाव $\pm\Delta i$ का प्रेक्षण नहीं हुआ। उच्च आवृत्ति-विसर्जन में प्राप्त मानों की तुलना में, दीप्ति की तीव्रता तथा धारा का परिमाण (सारणी 2) निम्न आवृत्ति में न्यून था।

सारणी 2

विभिन्न आवृत्तियों से प्राप्त विसर्जन-धारा की तुलना

p (मिमी)	kV	v' आपेक्षिक अधिवोल्टता	n (c/s)	i
32	0.94	0	50	320
34	0.6	0	500	170
32	0.9	0.02	1250	80
32	1.6	0,6	1500	800
34	2.04	76	टेसला (20 k c/s)	150
25	4.4	4.5	50	290
26	0.5	0	500	380
27	2.3	1.4	800	280
27	1.88	1.4	1000	670
26	0.9	0.17	1250	200
26	1.6	0.63	1500	1300
26	0.88	0	1700	140
26	0.9	0.07	2000	240
20	2.04	76	टेसला (20 k c/s)	55

N_2O के प्रारम्भिक गैस-दाब तथा नेट दाब-वृद्धि के आलेख (चित्र 2, उपचित्र) से प्रकट है कि आरम्भिक अवस्थाओं में अपघटन शून्य कोटि का और अन्तिम अवस्थाओं में प्रथम कोटि का होता है। प्रस्तुत प्रयोग में प्रयुक्त दशाओं में, किसी प्रारम्भिक गैस-दाब पर अपघटन की वास्तविक गति विभव तथा दोलन-आवृत्ति पर निर्भर है। क्योंकि स्फुलिंग-अन्तराल पर लगा विभव तथा अन्तराल की दूरी सदृश सभी कारक स्थिर रखे गये हैं, प्राप्त परिणाम पूर्णतः अनुप्रयुक्त विभव पर निर्भर हो सकते हैं।

उच्च दाबों पर निम्न आवृत्ति-अपघटन[4] के समान, धारा-समय आलेखों में धारा निम्निष्ठ की अनुपस्थिति में, अपरिवर्ती विसर्जन-धारा का कारण नाइट्रोजन के उच्च ऑक्साइडों की कम सम्भावना हो सकता है।[5]

किसी प्रत्यावर्ती क्षेत्र में किसी गैसीय विसर्जन का विच्छेदन-विभव Vs या देहली विभव Vm, गैस की प्रकृति तथा दाब, क्षेत्र की आवृत्ति तथा विसर्जन-स्थान की रैखिक विमाओं पर निर्भर होता है। अनुप्रयुक्त विभव की आवृत्ति के साथ बढ़कर अन्तराकाशी आवेश एक चरम मान पर पहुँच गया।[6] अनुक्रमिक चक्रों में अन्तराल में आयनों के संचय के कारण, 50 साइकिल के मान की तुलना में, उच्च आवृत्तियों पर Vm में वह ह्रास अपेक्षित है जो E या E/p के मानों को बदलकर इतना कर देता है जिस पर संघट्टन द्वारा इलेक्ट्रॉन आयनीकरण करने की क्षमता की सीमा तक पहुँच जाते हैं।[7]

क्षेत्र में परिवर्तन के कारण, गैस के काम से हटकर इलेक्ट्रॉनों का एक-दिशीय विस्थापन नहीं होता है, जिससे इलेक्ट्रॉनों के सम्भरण को बनाये रखने के लिए इलेक्ट्रॉनों के एक द्वितीयक स्रोत की परमावश्यकता नहीं है। ऐसी दशा में, α-प्रक्रम द्वारा इलेक्ट्रॉनों का जनन और विसरण, संलगन तथा पुनः संयोजन द्वारा हानि—इनका विसर्जन की क्रियाविधि में समावेश होता है। N_2O सदृश उस गैस में जिसमें पुनःसंयोजन के न्यून होने की अवस्थाओं में इलेक्ट्रॉन की उपेक्षा की जा सकती है, नली की दीवारों तक हुए विसरण द्वारा हानि की गति की तुलना में इलेक्ट्रॉन-जनन की गति को तनिक अधिक होने को ही भंजन-कसौटी माना जा सकता है।

उदासीन अणुओं से जुड़कर इलेक्ट्रॉन ऋण आयन बनाते हैं; जिनकी गति इलेक्ट्रॉन तथा अणुओं—दोनों के सांद्रण के अनुक्रमानुपाती होती है। $\pm\triangle i$ तथा समय-धारा आलेखों में निम्निष्ठ की अनुपस्थिति से प्रकट है कि प्रस्तुत विषय में यह कोई प्रमुख प्रक्रम नहीं है। प्रत्यक्ष आयनीकरण द्वारा तथा ऋण आयनों और गैस अणुओं के संघट्टन द्वारा जिससे उनका विलगन होता है, से इलेक्ट्रॉनों का निर्माण होता है[8]; N_2O के साथ बाद वाले प्रक्रम की सम्भावना प्रतीत नहीं होती है।

प्रत्यावर्ती उच्च आवृत्ति के विसर्जन में क्रियाशील एक दूसरा प्रक्रम है पुनःसंयोजन। धन तथा ऋण आयनों का पुनःसंयोजन $\partial N/\partial t = -\alpha D^{+}N^{-}$ समीकरण के अनुसार होता है, जबकि α पुनःसंयोजन गुणांक और N^{+} तथा N^{1} क्रमशः धन तथा ऋण आयनों की सांद्रता हैं। किसी समय आयतन-पुनःसंयोजन को भी एक प्रमुख कारक माना जाता था। आधुनिक विचारों के अनुसार आयनन-हानि को पृष्ठीय पुनःसंयोजन माना गया है।[8] विसरण के कारण दीवारों पर इलेक्ट्रॉनीय या पुनःसंयोजन होता है; आयतन—पुनःसंयोजन के अत्यल्प होने पर इसका महत्व बहुत अधिक बढ़ जाता है। तीव्रगामी मुक्त इलेक्ट्रॉन जो विसरित होकर दीवारों पर पहुँचते हैं और अपने पीछे धन आयनों को खींचते हैं, वे इस क्रिया में सहायक होते हैं। उत्तेजन या धन आयनों द्वारा आयनीकरण के लिए बहुत अधिक ऊर्जा की आवश्यकता होती है। धन आयनों द्वारा दीवारों पर द्वितीयक प्रक्रमों से उत्पन्न इलेक्ट्रॉनों के विसरण तथा परवर्ती आंशिक उदासीनीकरण को, उच्च आवृत्ति के विसर्जन के दौरान विघटन की मन्द गति का कारण माना जा सकता है।

ज्ञात होता है कि टेसला-उत्तेजन की तुलना में निम्न आवृत्ति-उत्तेजन से अपघटन तीव्रतर है (सारणी 1) अपघटन के दौरान विसर्जन-धारा का मान स्थिर रहा। किसी भी स्थिति में किसी भी प्रकार के जोशी प्रभाव $\pm\Delta i$ का प्रेक्षण नहीं हुआ। उच्च आवृत्ति-विसर्जन में प्राप्त मानों की तुलना में, दीप्ति की तीव्रता तथा धारा का परिमाण (सारणी 2) निम्न आवृत्ति में न्यून था।

सारणी 2

विभिन्न आवृत्तियों से प्राप्त विसर्जन-धारा की तुलना

p (मिमी)	kV	v' आपेक्षिक अधिवोल्टता	n (c/s)	i
32	0.94	0	50	320
34	0.6	0	500	170
32	0.9	0.02	1250	80
32	1.6	0,6	1500	800
34	2.04	76	टेसला (20 k c/s)	150
25	4.4	4.5	50	290
26	0.5	0	500	380
27	2.3	1.4	800	280
27	1.88	1.4	1000	670
26	0.9	0.17	1250	200
26	1.6	0.63	1500	1300
26	0.88	0	1700	140
26	0.9	0.07	2000	240
20	2.04	76	टेसला (20 k c/s)	55

N_2O के प्रारम्भिक गैस-दाब तथा नेट दाब-वृद्धि के आलेख (चित्र 2, उपचित्र) से प्रकट है कि आरम्भिक अवस्थाओं में अपघटन शून्य कोटि का और अन्तिम अवस्थाओं में प्रथम कोटि का होता है। प्रस्तुत प्रयोग में प्रयुक्त दशाओं में, किसी प्रारम्भिक गैस-दाब पर अपघटन की वास्तविक गति विभव तथा दोलन-आवृत्ति पर निर्भर है। क्योंकि स्फुलिंग-अन्तराल पर लगा विभव तथा अन्तराल की दूरी सदृश सभी कारक स्थिर रखे गये हैं, प्राप्त परिणाम पूर्णतः अनुप्रयुक्त विभव पर निर्भर हो सकते हैं।

उच्च दाबों पर निम्न आवृत्ति-अपघटन[4] के समान, धारा-समय आलेखों में धारा निम्निष्ठ की अनुपस्थिति में, अपरिवर्ती विसर्जन-धारा का कारण नाइट्रोजन के उच्च ऑक्साइडों की कम सम्भावना हो सकता है।[5]

किसी प्रत्यावर्ती क्षेत्र में किसी गैसीय विसर्जन का विच्छेदन-विभव Vs या देहली विभव Vm, गैस की प्रकृति तथा दाब, क्षेत्र की आवृत्ति तथा विसर्जन-स्थान की रैखिक विमाओं पर निर्भर होता है। अनुप्रयुक्त विभव की आवृत्ति के साथ बढ़कर अन्तराकाशी आवेश एक चरम मान पर पहुँच गया।[6] अनुक्रमिक चक्रों में अन्तराल में आयनों के संचय के कारण, 50 साइकिल के मान की तुलना में, उच्च आवृत्तियों पर Vm में वह ह्रास अपेक्षित है जो E या E/p के मानों को बदलकर इतना कर देता है जिस पर संघट्टन द्वारा इलेक्ट्रॉन आयनीकरण करने की क्षमता की सीमा तक पहुँच जाते हैं।[7]

क्षेत्र में परिवर्तन के कारण, गैस के काम से हटकर इलेक्ट्रॉनों का एक-दिशीय विस्थापन नहीं होता है, जिससे इलेक्ट्रॉनों के सम्भरण को बनाये रखने के लिए इलेक्ट्रॉनों के एक द्वितीयक स्रोत की परमावश्यकता नहीं है। ऐसी दशा में, α-प्रक्रम द्वारा इलेक्ट्रॉनों का जनन और विसरण, संलगन तथा पुनः संयोजन द्वारा हानि—इनका विसर्जन की क्रियाविधि में समावेश होता है। N_2O सदृश उस गैस में जिसमें पुनःसंयोजन के न्यून होने की अवस्थाओं में इलेक्ट्रॉन की उपेक्षा की जा सकती है, नली की दीवारों तक हुए विसरण द्वारा हानि की गति की तुलना में इलेक्ट्रॉन-जनन की गति को तनिक अधिक होने को ही भंजन-कसौटी माना जा सकता है।

उदासीन अणुओं से जुड़कर इलेक्ट्रॉन ऋण आयन बनाते हैं; जिनकी गति इलेक्ट्रॉन तथा अणुओं—दोनों के सांद्रण के अनुक्रमानुपाती होती है। $\pm\Delta i$ तथा समय-धारा आलेखों में निम्निष्ठ की अनुपस्थिति से प्रकट है कि प्रस्तुत विषय में यह कोई प्रमुख प्रक्रम नहीं है। प्रत्यक्ष आयनीकरण द्वारा तथा ऋण आयनों और गैस अणुओं के संघट्टन द्वारा जिससे उनका विलगन होता है, से इलेक्ट्रॉनों का निर्माण होता है[8]; N_2O के साथ बाद वाले प्रक्रम की सम्भावना प्रतीत नहीं होती है।

प्रत्यावर्ती उच्च आवृत्ति के विसर्जन में क्रियाशील एक दूसरा प्रक्रम है पुनःसंयोजन। धन तथा ऋण आयनों का पुनःसंयोजन $\partial N/\partial t = -\alpha D^{+}N^{-}$ समीकरण के अनुसार होता है, जबकि α पुनःसंयोजन गुणांक और N^{+} तथा N^{1} क्रमशः धन तथा ऋण आयनों की सांद्रता हैं। किसी समय आयतन-पुनःसंयोजन को भी एक प्रमुख कारक माना जाता था। आधुनिक विचारों के अनुसार आयनन-हानि को पृष्ठीय पुनःसंयोजन माना गया है।[8] विसरण के कारण दीवारों पर इलेक्ट्रॉनीय या पुनःसंयोजन होता है; आयतन—पुनःसंयोजन के अत्यल्प होने पर इसका महत्व बहुत अधिक बढ़ जाता है। तीव्रगामी मुक्त इलेक्ट्रॉन जो विसरित होकर दीवारों पर पहुँचते हैं और अपने पीछे धन आयनों को खींचते हैं, वे इस क्रिया में सहायक होते हैं। उत्तेजन या धन आयनों द्वारा आयनीकरण के लिए बहुत अधिक ऊर्जा की आवश्यकता होती है। धन आयनों द्वारा दीवारों पर द्वितीयक प्रक्रमों से उत्पन्न इलेक्ट्रॉनों के विसरण तथा परवर्ती आंशिक उदासीनीकरण को, उच्च आवृत्ति के विसर्जन के दौरान विघटन की मन्द गति का कारण माना जा सकता है।

The present research work is a study of the dermatoglyphics of the Birhor, Santhal and few typical diseases (both congenital and hereditary). A few important parameters—incidence of patterns of palmer areas, total ridge count, position of the axial triradius, atd angle, main line index, simain line and patterns on hallucal and interdigital areas of the sole—have been employed.

It is observed that the Birhor, Santhal and general people show almost the same finger patterns with more prevalent ulnar loop whereas the Munda and Oraon have the highest frequency of whorl in I & IV digits.

In hallucal area the Birhor shows 95.5% loop distal. Open field is found more in general people and few in tribal whereas in Birhor and Oraon have no such pattern. In interdigital areas I & IV the Birhor has cent per cent open field due to obsence of proximal triradius.

Mongolism, Holt-Oram Syndrom, Turner's Syndrom, Pseudohypoparathy roidism, Phenplketonuria, K-Syndrom, D-trisomy, E-trisomy, cat-eye Syndrom etc. show the peculiar and specific dermatoglyphics. Hence it indicates a clue to diseases.

हथेली, उँगलियों तथा तलवों की त्वचा शरीर की अन्य त्वचा से भिन्न होती है। इसमें महीन रेखाएँ तथा अनेक स्वेद ग्रन्थियाँ होती हैं जबकि शरीर की अन्य त्वचा सादी तथा चिकनी होती है और इसमें बाल तथा तैल ग्रन्थियाँ होती हैं।

त्वचीय रेखाएँ भ्रूण के 13वें में सप्ताह में ही अपना निश्चित आकार ले लेती हैं और किसी न किसी प्रकार का प्रतिरूप बनाती हैं जो आजीवन अपरिवर्तित रहता है। मृत्यु के उपरान्त भी जब तक त्वचा सड़कर विच्छिन्न नहीं हो जाती ये प्रतिरूप सुरक्षित रहते हैं। यह प्रत्येक व्यक्ति में अलग-अलग होती है। मोनोजायगोटिक बच्चे में भी महीन रेखाओं की संख्या विभिन्न होती है। प्रतिरूपों की यह विभिन्नता आनुवंशिक होती है और इनके विकास में अनेक जीनों का योगदान होता है। ये रेखाएँ अपराध-वैज्ञानिकों के लिए बहुत ही लाभदायक उपकरण प्रस्तुत करती हैं। त्वचीय प्रतिरूप हरेक व्यक्ति में अलग-अलग होने के कारण व्यक्तियों को पहचानने में इनका अध्ययन अति आवश्यक है।

इतिहास एवं क्षेत्र

डरमेटोग्लायफिक्स का अध्ययन मानव के लिए अति प्राचीन काल से ही महत्वपूर्ण विषयवस्तु रहा है क्योंकि वे जानवरों के पदचिन्ह को देखकर उसका शिकार करते थे। ज्योतिषी भी हथेली की रेखाओं का अध्ययन करके भविष्यवाणी करते आ रहे हैं। इस सम्बन्ध में वैज्ञानिक अध्ययन भी काफी पुराना है। 17वीं शताब्दी में नेहेमिया ग्रेव (1684)—फेलो ऑफ द कॉलेज ऑफ फिजिसियन्स एण्ड सर्जन्स ऑफ द रॉयल सोसायटी, इंगलैंड, प्रो० मारसेलो मालफिजी (1986)—डिपार्टमेण्ट ऑफ

एनाटोमी, बोलोगना विश्वविद्यालय, इटली ने हथेली की वाह्य आकृति एवं उसके कार्यों का वर्णन किया। 1823 में जॉन एभेंगलिस्ट पुरकिंगे ने डाक्टर ऑफ मेडिसिन (उपाधि) के लिये ब्रेसुल विश्वविद्यालय में त्वचीय प्रतिरूप (फिंगर प्रिंट) पर अपना शोध कार्य प्रस्तुत किया। डा० हेनरी फ्लाइड (1858) सुजुकी हास्पिटल, टोकियो ने जापानी तथा अन्य नागरिकों के त्वचीय प्रतिरूपों का अध्ययन करके प्रजातीय विभिन्नताओं की तुलना की। उसने यह भी सुझाव दिया कि इसके द्वारा अपराधियों को पहचाना जा सकता है। इन रेखाओं के सम्बन्ध में सर्वप्रथम हेनरी फ्लाउड[1] ने डार्विन को लिखा था। उसने अपने चचेरे भाई गाल्टन को बताया कि फ्लाइड की खोज काफी रोचक है। गाल्टन[2] ने अपने अध्ययन में पाया कि सभी प्रजातियों में अलग-अलग संख्या में रेखाएँ होती हैं। इन्होंने पतिरूपों को W-L-A (होर्ल-लूप-आर्च) में विभक्त किया। हेनरी फ्लाउड ने अंगुलियों के छापों को पहचानने के लिए 16 बिन्दुओं का प्रस्ताव किया। इसकी वर्गीकरण-पद्धति को वेलपर समिति ने अनुशंसित किया। इससे मानवमितीय पद्धति (एन्थ्रोपोमेट्रिक मेजरमेण्ट) में कमी आई और डरमेटोग्लायफिक्स का अध्ययन विभिन्न क्षेत्रों में होने लगा। इसके परिणामस्वरूप 1897 ई० में विश्व के प्रथम फिंगरप्रिन्ट ब्यूरो का जन्म कलकत्ता में हुआ। 1901 ई० में स्कॉटलैंड में और फिर बाद में दुनिया के दूसरे देशों में भी इसी प्रकार का ब्यूरो स्थापित होने लगा।

प्रजातीय अध्ययन

हेनरी ने पाया कि मानव के विकास क्रम में अंगुली एवं हथेली की रेखाओं ने महत्वपूर्ण योगदान किया है। प्रजातीय समानताओं एवं विभिन्नताओं के लिये ये रेखाएँ बहुत ही उपादेय साक्ष्य प्रस्तुत करती हैं। प्रजातीय वर्गीकरण के उपयोग में लाये गये अन्य आधारों में आपसी मतभेद हो जाते हैं लेकिन इन प्रतिरूपों के आधार पर स्वच्छ वर्गीकरण होता है। वैसे बीसवीं शताब्दी के मध्य तक शारीरिक मानवशास्त्री आनुवंशिक दृष्टिकोण के आधार पर मानवमिति आदि लक्षणों को ही मान रहे थे लेकिन अब रक्त-समूह, त्वचीय प्रतिरूप आदि पर विशेष ध्यान दिया जा रहा है। यदि दो प्रशिक्षित व्यक्ति कपाल को मापते हैं तो उनके मापों में व्यक्तिगत त्रुटि के कारण विभिन्नता आ जाती है परन्तु त्वचीय प्रतिरूप स्थायी होते हैं जिसे कभी भी गिना जा सकता है। प्रतिरूपों के विकास में अनेक जीनों का योगदान होता है। इसलिये इस बहुजीनता के कारण इनकी वंशागत प्रणाली के विषय में ठीक-ठीक नहीं कहा जा सकता फिर भी आयु स्थिर तथा वातावरण स्थिर होने के कारण इन विशेषकों का उपयोग मानव विभेदों के अध्ययन में सहायता करता है। विभिन्न सिन्ड्रोमी प्रभावों के अध्ययन में भी यह सहायक होते हैं।

विश्व में डरमेटोग्लायफिक्स

रीफ[3] के द्वारा तैयार किये गये डरमेटोग्लायफिक्स के विश्व मानचित्र से यह पता चलता है कि आस्ट्रेलियन एवोरोजिन्स, ग्रिनलैंड और अलास्कन एस्किमों में होर्ल की संख्या 60% से भी अधिक होती है जिसमें पैटर्न प्रखरता (इन्टेन्सिटी) 15.5 से 18 होती है। लूप 40% से कम होता है तथा आर्क 1% से अधिक नहीं होती है। उनके पड़ोसी सुदूरपूर्व एवं उत्तरी अमेरिका के मंगलियन में होर्ल

50 से 55% (पैटर्न इन्टेनसिटी 14.2 से 15.5) होती है। दुनिया के मध्य भाग होर्ल 35-40% (पैटर्न इन्टेन्सिटी 12.5 से 14.2) होती है। उत्तरी यूरोप, दक्षिणी अमेरिका और केन्द्रीय अफ्रीका में होर्ल 30% (पैटर्न इन्टेन्सिटी 12 से 13.5) पायी जाती है। उत्तरी-पश्चिमी अफ्रीका एवं दक्षिणी-पश्चिमी अफ्रीका में होर्ल 20% (पैटर्न इन्टेन्सिटी 10 से 12) होती है। दक्षिणी-पूर्वी अफ्रीका के पिग्म में होर्ल सिर्फ 15% (पैटर्न इन्टेन्सिटी 10 से नीचे) के लगभग होती है।

भारत में डरमेटोग्लायफिक्स

भारत में होर्ल की संख्या दक्षिण तथा पूरब की ओर धीरे-धीरे बढ़ती जाती है तथा लूप की स्थिति ठीक उल्टी रहती है। सरकार[4] ने पाया कि मुण्डा जनजाति में 40% होर्ल होती है। साहु[5] ने तलवे के त्वचीय प्रतिरूप के आधार पर पाया है कि मुण्डा और बिरहोर जनजाति में कोई महत्वपूर्ण अन्तर नहीं है जबकि बिरहोर एवं उराँव जनजाति के बीच कई महत्वपूर्ण अन्तर हैं।

त्वचीय प्रतिरूप

त्वचीय प्रतिरूप मुख्यतः तीन प्रकार के होते हैं—होर्ल (चक्र), लूप (शंख) तथा आर्क (चाप)। ये तीनों प्रतिरूप मुख्यतया उँगलियों के अन्तिम पोरों पर होते हैं परन्तु इनका वितरण हथेली तथा तलवों के विभिन्न भागों में भी होता है।

होर्ल : होर्ल में दो ट्राइरेडिया दोनों छोरों पर होती हैं और रेखाएँ चक्र के समान घूमी हुई होती है।

लूप : इसमें एक ट्राइरेडियस होती है तथा रेखाएँ जिस ओर से अन्दर आती हैं उसी ओर से वापस निकलती हैं। यदि यह छोटी अंगुली की ओर खुलती है तो उसे **अलनर लूप** कहते हैं तथा अंगूठे की ओर खुलने वाली को **रेडियल लूप** कहते हैं।

आर्क : इसमें रेखाएँ एक दूसरे के समानान्तर होती हैं और किसी भी प्रकार का घुमाव नहीं होता है। इसमें ट्राइरेडियस नहीं होती है।

ट्राइरेडियस : तीन विभिन्न क्षेत्रों से आने वाली समानान्तर रेखाएँ जिस जगह मिलती हैं उसे ट्राइरेडियस कहते हैं। यह छापों का वर्गीकरण करने का महत्वपूर्ण बिन्दु है।

रीज काउन्ट

ट्राइरेडियस एवं कोर रेखा के बीच उपस्थित रेखाओं की संख्या रीज काउन्ट है। कोर रेखाओं का मध्य बिन्दु है। सम्पूर्ण रीज काउन्ट दसों अंगुलियों की सभी रेखाओं का योग है जो आनुवंशिकतः नियन्त्रित होते है।

हथेली

हथेली के मुख्य क्षेत्र थीनर, हाइपोथीनर एवं अन्तर-अंगुलीय क्षेत्र हैं। थीनर अंगूठे के नीचे का

उठा हुआ मांसल क्षेत्र है। हाइपोथीनर अलनर ओर का क्षेत्र है तथा अन्तर-अंगुलीय क्षेत्र दो अंगुलियों के मध्य का उभरा हुआ क्षेत्र है। इन क्षेत्रों में कोई निश्चित प्रतिरूप हो भी सकता है और नहीं भी। अंगूठे को छोड़कर बाकी सभी अंगुलियों के आधार स्थल पर एक-एक ट्राइरेडियस होता है जिसे a, b, c एवं d कहते हैं। हथेली की कलाई की ओर एक अन्य ट्राइरेडियस होता है जिसे एक्सियल ट्राइरेडियस कहते हैं। हथेली के त्वचीय प्रतिरूप के अध्ययन में इस ट्राइरेडियस का अपना स्थान बहुत ही महत्वपूर्ण है क्योंकि बहुत सी बीमारियों के कारण इसका स्थान हथेली के अन्तर्गत बदलता रहता है।

मुख्य रेखा

ट्राइरेडियस से निकलने वाली रेखाएँ मुख्य रेखाएँ हैं जो हथेली के बाहरी छोर पर अन्त होती हैं।

फ्लेक्सन क्रीज

हथेली में कुछ मोटी तथा गहरी रेखाएँ होती हैं जिन्हें फ्लेकशन क्रीज कहते हैं। इनमें से तीन मुख्य हैं जिन्हें जीवन रेखा, हृदय रेखा तथा मस्तिष्क रेखा कहते हैं। कभी-कभी हृदय रेखा तथा मस्तिष्क रेखा मिलकर एक ही रेखा बनाती हैं जिसे सिमियन रेखा कहते हैं। यह बहुत ही कम पायी जाती है।

तलवा

हथेली की ही तरह तलवे में भी वही प्रतिरूप पाये जाते हैं। एनाटोमी की दृष्टि से मानव का तलवा 8 क्षेत्रों में बाँटा गया है जहाँ विभिन्न प्रकार के त्वचीय प्रतिरूप पाये जाते हैं। इन्हें टिबियो-फिबुलर अनुक्रम के आधार पर—हेलुकल क्षेत्र, इंटरडिजिटल II, III, एवं IV, हाइपोथीनर डिस्टल, हाइपोथीनर प्रोक्सिमल, केलकर एवं थीनर प्रोक्सिमल कहा जाता है सभी अंगुलियों के आधार-स्थल पर एक-एक ट्राइरेडियस होता है जिसे a, b, c, d एवं e कहते हैं। अंगूठे की नीचे वाले भाग को हेलुकल क्षेत्र कहते हैं। इस क्षेत्र में साधारणत: लूप पाये जाते हैं जो I अन्तर अंगुलीय क्षेत्र में खुलते हैं। होर्ल दूसरे नम्बर में आता है तथा खुला क्षेत्र एवं लूप टिबियल बहुत कम मिलते हैं। कभी-कभी हेलुकल क्षेत्र में आर्च 'S' आकार में रूपान्तरित हो जाता है।

आजकल भारत में भी त्वचीय प्रतिरूपों पर शोध कार्य उपलब्ध हैं परन्तु तुलनात्मक रूप में बिहार में बहुत ही कम शोधकार्य हुआ है। बिहार की दो प्रमुख जनजातियाँ मुण्डा एवं उराँव की अंगुली एवं हथेली के त्वचीय प्रतिरूप पर कुछ कार्य हुए हैं (वर्मा[6], मुखर्जी एवं चक्रवर्ती[7], चक्रवर्ती[8], दास शर्मा[9], दास शर्मा एवं साहु[10], शुक्ला एवं त्यागी[11]। इन्हीं जनजातियों के सोलप्रिंट पर दास शर्मा[12] के अलावा कोई कार्य नहीं हुआ है। आदिम जनजाति बिरहोर पर साहु[13] ने सोलप्रिन्ट के अलावा कुछ अन्य क्षेत्रों में तथा गुप्ता एवं अन्य[14] ने फिंगरप्रिन्ट पर कार्य किया है। परन्तु संथाल जनजाति पर (विस्वास[15,16] को छोड़कर) किसी भी प्रकार के त्वचीय प्रतिरूप का अध्ययन

नहीं किया गया है। प्रस्तुत शोध कार्य बिरहोर, संथाल एवं कुछ विशेष रोगियों का एक तुलनात्मक अध्ययन है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिये 9 बिरहोर टंडा के 100 बिरहोर मर्द (कुल जनसंख्या के 5% से ज्यादा) तथा गालुडीह (सिंहभूम) क्षेत्र के 220 संथाल मर्द के फिंगर, पाम तथा सोल प्रिन्ट लिये गये हैं तथा उनका विश्लेषण कमिंस एवं मिडलो[17] के आधार पर किया गया है। तुलनात्मक अध्ययन के लिये विशेष रोगियों का संकलन प्रकाशित पत्रिकाओं से लिया गया है। साथ ही साथ निम्नलिखित महत्वपूर्ण प्राचलों का प्रयोग किया गया है।

1. त्वचीय प्रतिरूपों की बारम्बारता,
2. हथेली के त्वचीय प्रतिरूप की घटना,
3. कुल रीज काउण्ट,
4. एक्सियल ट्राइरेडियस का स्थान,
5. atd कोण,
6. मुख्य रेखा देशना,
7. सिमियन रेखा एवं
8. तलवे के हेलुकल एवं अंगुलीय क्षेत्रों में प्रतिरूप।

परिणाम तथा विवेचना

त्वचीय प्रतिरूपों की बारम्बारता

सारणी 1 में अंगुली की त्वचीय प्रतिरूपों की बारम्बारता को दर्शाया गया है। सारणी से यह स्पष्ट पता चलता है कि अंगुलियों में साधारणतः अलनर लूप पाया जाता है तथा रेडियल लूप बहुत ही कम मिलता है। रेडियल लूप की संख्या मुख्यतः इंडेक्स अंगुली में पायी जाती है तथा बाकी अंगुली में नहीं के बराबर मिला है। होर्ल दूसरी संख्या में आता है तथा आर्च भी बहुत कम पाया गया है। मुण्डा एवं उराँव में I तथा IV अंगुली में होर्ल अधिक पाया गया है। दुसाध में भी लगभग ऐसी ही स्थिति है।

हाल्ट ओरम सिण्ड्रोम रोगियों में 80% होर्ल प्रतिरूप पाया गया है तथा इनकी माताओं में भी होर्ल की संख्या अधिक पायी गयी है। मंगोलियन में होर्ल की बारम्बारता कम है। इसी प्रकार जन्मजात रूबेलिया तथा हाल्ट ओरम सिण्ड्रोम में रेडियल लूप कम पाया जाता है।

सारणी 1

अंगुलीय त्वचीय प्रतिरूपों की बारम्बारता (% में)

आकृति	अंगूठा I	इंडेक्स II	मिडिल III	रिंग IV	छोटी V	स्रोत
सामान्य लोग						
W	35.41	29.47	16.37	11.41	34.44	
Lu	60.89	35.20	74.07	87.62	62.27	
Lr	3.21	24.70	2.52	0.11	0.98	
A	3.49	10.63	7.03	0.83	2.30	
						सरन[18]
मुण्डा (अ० जन०—बिहार)						
W	55.50	39.65	32.41	63.45	27.93	
Lu	36.50	34.48	62.75	33.79	69.99	
Lr	0.80	8.97	0.35	0.35	0.35	
A	7.20	16.89	3.46	2.41	1.72	
						दास शर्मा[19]
उराँव (अ० जन०—बिहार)						
W	65.59	52.70	40.30	76.46	37.94	
Lu	34.00	37.35	57.64	22.64	61.17	
Lr	1,10	6.76	0.30	0.59	9.59	
A	1.36	3.82	1.76	0.90	*.39	
						तथैव
दुसाध (अ० जा०—बिहार)						
W	47.10	42.60	29.40	62.20	23.00	
Lu	48.20	41.20	68.00	36.00	76.20	
Lr	1.20	7.00	—	0.60	0.40	
A	2.80	9.20	2.60	0.20	0.40	
						तथैव

बिरहोर (अ० जन०—बिहार)

W	25.82	28,51	9.73	13.62	25.00	
Lu	68.45	29.63	84.42	85.06	72.63	
Lr	4.60	27.14	1.23	—	1.55	
A	1.23	14.72	4.62	1.32	0.92	वर्तमान अध्ययन

संथाल (अ० जन०—बिहार)

W	30,70	24.71	5.68	8.51	25.63	
Lu	61.27	39.46	80.26	88·61	70.51	
Lr	5.39	25.22	4.53	1.78	1.24	
A	2.54	10·61	9.53	2.10	2.62	तथैव

W=होर्ल, Lu=लूप अलनर, Lr=लूप रेडियल, A—आर्च, अ० जन०=अनुसूचित जनजाति, अ० जा०=अनुसूचित जाति ।

2. हथेली के त्वचीय प्रतिरूप की घटना

अंगुली के समान ही हथेली में त्वचीय प्रतिरूप पाये जाते हैं परन्तु बेस्टिजियल प्रतिरूप तथा खुला क्षेत्र भी पाये जाते हैं । सामान्य लोगों में दाहिने हाथ की हाइपोथीनर, इंटरडिजिटेल II एवं III क्षेत्रों एवं बाँये हाथ की थीनर/इंटरडिजिटल I एवं IV क्षेत्रों में बहुतेरे प्रतिरूप मिलते हैं । बिरहोर तथा संथाल की स्थिति भी सामान्य लोगों जैसी है परन्तु अन्य क्षेत्रों में भी अधिक प्रतिरूप मिले हैं ।

मंगोलियन, टरनर्स सिण्ड्रोम एवं स्यूडोहाइपो पारा थाइराडिज्म रोगियों के हाइपोथीनर क्षेत्र में सामान्य लोगों से अधिक प्रतिरूप पाये जाते हैं जबकि फिनाइलकिटोन्यूरिया रोगियों में कम प्रतिरूप मिलते हैं ।

3. कुल रीज काउण्ट

पेनरोज[20] के अनुसार रीज काउण्ट का साधारण मान—आर्च=0, लूप=12 एवं होर्ल ><19 तथा कुल रीज काउण्ट (दसो अंगुली मिलाकर) मर्द=145 एवं औरत=127 है । बिरहोर तथा संथाल में भी कुल रीज काउण्ट पेनरोज के अनुरूप ही पाया गया है ।

हाल्ट ओरम सिण्ड्रोम एवं टरनर्स के पुरुष रोगियों में कुल रीज काउण्ट अधिक पाया गया है जबकि काइनफेल्टर्स सिण्ड्रोम में रीज काउण्ट में महत्वपूर्ण कमी पायी गयी है ।

4. एक्सियल ट्राइरेडियस का स्थान

साधारणत: 64% लोगों में एक्सियल ट्राइरेडियस कलाई की ओर पाई गई है। बिरहोर तथा संथाल में कलाई की ओर पायी जाने वाली एक्सियल ट्राइरेडियस की संख्या क्रमश: 82% तथा 69.5% है।

मंगोलियन, D-ट्राइसोमी, E-ट्राइसोमी, जन्मजात हृदय रोगी आदि रोगियों में यह ट्राइरेडियस अंगुली की ओर स्थित होती है।

5. atd कोण

a, t एवं d ट्राइरेडियस के मिलन कोण को atd कोण कहते हैं। बिरहोर तथा संथाल में atd कोण क्रमश: 52° एवं 57° पाया गया है जो सामान्य लोगों से थोड़ा अधिक है। पेनरोज के अनुसार साधारण लोगों में यह कोण 48°, टरनर्स सिण्ड्रोम में 66° एवं D-ट्राइसोमी में 108° का होता है। डारवी एवं ह्यग[21] के अनुसार कैटआई सिण्ड्रोम में यह कोण 110° का, मंगोलिज्म में 162° तथा पटाउ सिण्ड्रोम में 216° का होता है।

6 मुख्य रेखा देशना

बिरहोर तथा संथाल में भी सामान्य लोगों जैसी ही हथेली की रेखाएँ कलाई की ओर झुकी होती हैं। फाइनेन सेफली रोगियों में तिरछी रेखाएँ होती है जबकि टरनर्स सिण्ड्रोम में रेखाएँ उदग्र होती हैं।

7. सिमियन रेखा

यह लक्षण साधारण लोगों में सिर्फ 2% ही पाया जाता है जबकि बिरहोर तथा संथाल में इस लक्षण के एक भी व्यक्ति नहीं पाया गया है।

मंगोलियन, टरनर्स सिण्ड्रोम एवं D तथा E-ट्राइसोमी में यह लक्षण अधिक पाया जाता है। डाउन्स सिण्ड्रोम के माताओं में यह लक्षण 6% पाया जाता है (लक्ष्मी नारायण एवं अन्य[22])।

8. तलवे के हेलुकल एवं अंगुलीय क्षेत्रों में प्रतिरूप

सारणी 2 में हेलुकल तथा इंटरडिजिटल II, III एवं IV में त्वचीय आकृति के तुलनात्मक आँकड़े (% में) को दर्शाया गया है। हेलुकल क्षेत्र में लूप डिस्टल की आकृति बिरहोर में 95.5% पायी गयी है। होर्ल की संख्या 3% तथा लूप टिबियल 1.5% ही है। सामान्य लोगों में यह लक्षण 48.5% पाया गया है। मुण्डा, उराँव तथा संथाल जनजाति में यह लक्षण समान है (73%, 74.3% तथा 74%)। ओपेन फिल्ड की संख्या सामान्य लोगों में अधिक है जबकि जनजातियों में कम है। उराँव और बिरहोर में यह आकृति नगन्य है।

इंटरडिजिटल क्षेत्र II एवं IV में प्रोक्सिमल ट्राइरेडिया नहीं पाये गये हैं जिससे बिरहोर में शत्-प्रतिशत खुले मैदान की आकृति पायी गयी है जबकि संथाल में मुण्डा, उराँव एवं अन्य लोगों जैसा ही ओपेन फील्ड की बाहुलता मिली है। मुण्डा एवं उराँव में लूप डिस्टल के अलावा अन्य आकृतियाँ भी पायी गयी हैं।

सारणी 2

हेलुकल तथा इंटरडिजिटल II, III एवं IV में त्वचीय आकृति (% में)

आकृति	हेलुकल	II	III	IV	स्रोत
सामान्य लोग					
O	12,2				
W	30.8				
Ld	48.5				
Lt	7.3				
					सरन[1
दिल्ली और पंजाब के लोग					
O	8.22	69.78	41.32	84.89	
W	24.96	2.55	11.16	0.15	
Ld+Lt	66.82	27.67	47.52	14.96	
					दत्ता[21]
मुण्डा (बिहार)					
O	4.8	77.0	37.7	84.1	
W	5.9	1.6	5.1	1.2	
Ld	73.0	10.3	54.4	14.3	
Lt	6.3	8.7	2.4	0.4	
					दास शर्मा[23]
उराँव (बिहार)					
O	0.0	89.8	40.7	81.1	
W	11.3	0.9	1.5	—	
Ld	74.3	3.9	55.5	18.1	
Lt	6.4	5.4	2.4	0.9	

बिरहोर (बिहार)					
O	—	100.0	49.0	100.0	
W	3.0	—	—	—	
Ld	95.5	—	51.0	—	
Lt	1.5	—	—	—	
					साहु[13]
संथाल (बिहार)					
O	8.13	91.5	42.8	96.3	
W	15.67	1.2	2.6	—	
Ld	74.0	6.7	34.6	3.7	
Lt	5.2	0.6	—	—	
					वर्तमान अध्ययन

O=ओपेन फिल्ड, W=होर्ल, Ld=लूप डिस्टल, Lt=लूप टिबियल

इंटर डिजिटल क्षेत्र III में लूप डिजिटल एवं ओपेन फील्ड की संख्या लगभग बराबर पायी गयी है।

मंगोलियन रोगियों में 56.4% आर्च टिबियल मिलता है। टरनर्स सिण्ड्रोम, K-सिण्ड्रोम, जन्मजात हृदय रोगी, साइजोफ्रेनिया, D एवं E ट्राइसोमी, फिनाइल्किटोन्युरिया, डी लेंग सिण्ड्रोम, न्यूरो फाइब्रोमेटिस में डरमल आकृति पायी जाती है (रीड[24])। फिनाइलकिटोन्युरिया रोगियों में हाइपोथीनर, थीनर एवं इंटरडिजिटल क्षेत्रों में कोई निश्चित आकृति नहीं बनती है तथा मुख्य रेखाएँ छोटी हो जाती हैं।

निर्देश

1. फ्लाउड, हेनरी, **साइटेट फ्रोंस सम आस० अ० फी० एन्थ्रो०**, 1965, 55-70
2. गाल्टन, एफ०, **फिंगर प्रिंट**, 1892, लंडन
3. रीफ, डी० सी०, **अमे० जर्न हू० जे०**, 1953, 5, 389
4. सरकार, एस० एस०, **द एबोरिजिनल रेसेस ऑफ इन्डिया**, 1954, कलकत्ता
5. साहु, चतुर्भुज, **विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका**, 1991, **34**, 107-144
6. वर्मा, बी० बी० **मैन इन इन्डिया**, 1952, 32, 134-143
7. मुखर्जी, डी० पी० तथा चक्रवर्ती, एम० आर०, **मोरफो एन्थ्रो**, 1964, 55, 32-45

8. चक्रवर्ती, एम० आर०, बुले० वि०ट्रा० रि० ई०, 1965, 143-167

9. दास शर्मा, पी० ई० एन० सो० 1974, 11, 121-126

10. दास शर्मा, पी० एवं साहु, बी०, नियोन, 1973, 81, 260-267

11. शुक्ला, बी० आर० के० तथा त्यागी, डी०, ई० ज० फि० ए० हू० जे०, 1975, 1, 59-65

12. दास शर्मा, पी०, मैन इन इन्डिया, 1977, 57, 4

13. साहु, चतुर्भुज, विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका, 1991, 34, 107-114

14. गुप्ता, पी० तथा अन्य मैन इन इन्डिया, 1970, 50, 135-140

15. विश्वास, पी० सी०, संथाल आँफ सं० प०, 1956, दिल्ली

16, विश्वास, पी० सी०, साइटेट फ्रोम वर्मा, 1952

17. कमिस, एच० तथा मिडलो, सी०, न्यूयार्क, 1961

18. सरन, आर० के०, साइ० रिपो०, 1977, 14, 4, 213-217

19. दास शर्मा, पी०, ज० सौ० रि० 1978, 21, 2, 148-167

20. पेनरोज, एल० एस०, नेचर, 1963, 197

21. डारवी तथा ह्यग, ई० आ० चा० हेल्थ, लन्दन

22. लक्ष्मी नारायण तथा अन्य, वही 1989, 129

23. दत्ता, पी० के० सम आस० आँफ फि० एन्थ्रो०, 1963, 134

24. रीड, टी० ई०, जे० पेडि० 1970, 77

Vjnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 35, No. 2, 1992

2-दूरीक समष्टियों में प्रतिचित्रणों के अनुक्रम का अभिसरण एवं उनके उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु

श्याम लाल सिंह तथा विजयेन्द्र कुमार
गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्वार

[प्राप्त—अक्टूबर 28, 1991]

सारांश

मान लें $P, Q. S, T, P_n, Q_n, S_n, T_n$ $(n=1, 2, ...)$ 2-दूरीक समष्टि पर प्रतिचित्रण हैं तथा u प्रतिचित्रणों P, Q, S, T का उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है और u_n प्रतिचित्रणों P_n, Q_n, S_n, T_n $(n=1, 2, ...)$ का स्थिर बिन्दु है। इस अध्याय में उन शर्तों का अध्ययन किया गया है जिनके अधीन प्रतिचित्रण अनुक्रमों $[P_n], [Q_n], [S_n]$ और $[T_n]$ के क्रमशः P, Q, S और T को (बिन्दुशः अथवा एकसमान रूप से) अभिसरित होने की स्थिति में स्थिर बिन्दु अनुक्रम $[u_n]$ बिंदु u को अभिसरित होता है।

Abstract

Convergence of sequences of mappings on 2-metric spaces and their common fixed point. *By* Shyam Lal Singh and Vijayendra Kumar, Department of Mathematics, Gurkula Kangri Vishwavidyalaya, Hardwar.

Let $P, Q, S, T, P_n, Q_n, S_n, T_n$ $(n=1, 2, ...)$ be mappings on a 2-metric space (X, d). Further let u be a common fixed point of P, Q, S, T and u_n be a common fixed point of P_n, Q_n, S_n, T_n $(n=1, 2, ...)$. In this paper we study the conditions under which $\{u_n\}$ converges to u, if the sequences of mappings $\{P_n\}$. $\{Q_n\}$. $\{S_n\}$ and $\{T_n\}$ converge (pointwise or uniformly) respectively to P, Q, S and T.

1. प्रस्तावना

मान लें M एक पूर्ण दूरीक (1-दूरीक) समष्टि है। M में स्व-प्रतिचित्रणों का अनुक्रम $\{f_n\}$ इस प्रकार है कि—

1. प्रत्येक पूर्णांक n के लिए f_n संकुचनीय प्रतिचित्रण है;
2. प्रतिचित्रण अनुक्रम $\{f_n\}$ संकुचनीय प्रतिचित्रण f पर एकसमान रूप से अभिसरित होता है।

ऐसी स्थिति में प्रत्येक $n=0, 1, 2, \ldots,$ के लिये अद्वितीय स्थिर बिन्दु u_n का इस प्रकार अस्तित्व होता है कि

$$f_n u_n = u_n$$

अब अनुक्रम $\{u_n\}$ के u पर अभिसरित होने के विषय में जिज्ञासा स्वाभाविक है। इस दिशा में प्रथम परिणाम बोन्साल[2] ने संकुचन प्रतिचित्रण f_n के प्रत्येक $n=0, 1, 2, \ldots,$ तथा $k \in (0, 1)$ के लिये शर्त $d(f_n u, f_n v) \leqslant kd(u, v)$, सन्तुष्ट करने की स्थिति में प्राप्त किया है। कालांतर में इस प्रकार के अध्ययन में पर्याप्त प्रगति हुई एवं अनेक परिमाजित परिणाम आये हैं (उदाहरणार्थ देखें[1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15] और [16])।

2-दूरीक समष्टि पर स्व-प्रतिचित्रणों के अनुक्रम के अभिसरण तथा उनके उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दुओं के अभिसरण सम्बन्धित स्थिर बिन्दु प्रमेय हाल ही में खान[4], रोअड्स[8], सिंह[10], सिंह-राम[14] व [15] तथा अन्यों द्वारा प्राप्त किये गये हैं। वस्तुतः खान[4] ने 2-दूरीक समष्टि पर दो स्व-प्रतिचित्रण अनुक्रमों के लिये अभिसरण प्रमेय प्राप्त किया है तथा सिंह-राम[14] ने 2-दूरीक समष्टि पर तीन स्व-प्रतिचित्रणों द्वारा सन्तुष्ट होने वाली दो प्रकार के प्रतिचित्रण शर्तों के अधीन अभिसरण सम्बन्धी परिणाम प्राप्त किये हैं। (इस प्रपत्र के अन्तिम अनुभाग में टिप्पणियाँ देखें)। वस्तुतः 2-दूरीक समष्टि पर चार प्रतिचित्रण अनुक्रमों के (बिन्दुशः अथवा एकसमान रूप से) अभिसरित होने की स्थिति में अभिसरण सम्बन्धी स्थिर बिन्दु प्रमेय प्राप्त किये गये हैं।

2. परिणाम

इस एवं अन्तिम अनुभाग हेतु मान लें (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है तथा P_n, Q_n, S_n में $T_n (n=1, 2, \ldots)$ तथा P, Q, S, T समष्टि X पर प्रतिचित्रण है। हमारा प्रथम परिणाम निम्नवत् है :

प्रमेय 1. मान लें 2-दूरीक समष्टि X पर P_n, Q_n, S_n और T_n स्व-प्रतिचित्रण हैं और u_n $(n=1, 2, \ldots)$ उनका उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है। मान लें अनुक्रम $\{P_n\}, \{Q_n\}, \{S_n\}$ और $\{T_n\}$ X में क्रमशः स्व-प्रतिचित्रणों P, Q, S और T पर एकसमान रूप से अभिसरित होते हैं। यदि u प्रतिचित्रणों P, Q, S और T का उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु हो तथा

$$d(Px, Qy, a) \tag{1}$$

$\leqslant h$ अधिकतम $\{d(Sx, Ty, a), d(Px, Sx, c), d(Qy, Ty, a), d(Px, Ty, a), d(Qy, Sx, a)\}$

X के समस्त x, y, a के लिए जबकि $p \in (0, 1)$ सन्तुष्ट हो तब, $u_n \to u$.

उपपत्ति : नियतांक $\epsilon_i > 0, i-1, 2$ लें। चूंकि X पर $\{P_n\}$ और $\{S_n\}$ क्रमशः P और S पर एकसमान रूप से अभिसरित होते हैं अतः धन पूर्णांक N_1 व N_2 इस प्रकार अस्तित्व में हैं कि X के समस्त a, x के लिए

$$d(P_n x, Px, a) < \epsilon_1 \text{ समस्त } n \geqslant N_1 \text{ के लिए}$$

तथा

$$d(S_n x, Sx, a) < \epsilon_2 \text{ समस्त } n \geqslant N_2 \text{ के लिए}$$

प्राप्त होता है। अब N, M तथा ϵ इस प्रकार लें कि

$$N = \text{अधिकतम } \{N_1, N_2\}$$

और

$$(\epsilon/M) = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$$

जहां $M =$ अधिकतम $\{(2+2h)/(1-h), (2+3h)\}$.

n के किसी भी मान के लिये

$$d(u_n, u, a)$$

$$\leqslant d(Pu_n, Qu, a) + d(u_n, Pu_n, a) + d(u_n, u, Pu_n)$$

$$\leqslant h \text{ अधिकतम } \{d(Su_n, Tu, a), d(Pu_n, Su_n, a), d(Pu_n, Tu, a), d(Qu, Su_n, a)\}$$

$$+ d(u_n, Pu_n, a) + d(u_n, u, Pu_n).$$

इसलिए X के प्रत्येक a के लिए तथा $n \geqslant N$ के लिये या तो

$$d(u_n, u, a)$$

$$< hd(Su_n, Tu_n, a) + 2\, \epsilon/M$$

$$\leqslant h[d(S_n u_n, Su_n, a) + d(u_n, u, a) + d(S_n u_n, Su_n, a)] + 2\, \epsilon/M$$

अर्थात्

(A) $(1-h)\, d(u_n, u, a) < (2+2h)\, \epsilon/M$;

या

$$d(u_n, u, a)$$

$$< hd(Pu_n, Su_n, a) - 2\, \epsilon/M$$

$$\leqslant h[d(P_n u_n, Pu_n, a) + d(S_n u_n, Su_n, a)$$

$$+d(P_nu_n, Pu_n, Su_n)]+4\,\epsilon/M$$

(B) $<(2+3h)\,\epsilon/M$:

या

$$d(u_n, u, a)$$

$$< hd(Pu_n, u, a)+2\,\epsilon/M$$

$$\leqslant h[d(P_nu_n, Pu_n, a)+d(P_nu_n, Pu_n, u)$$

$$+d(u_n, u, a)]+2\,\epsilon/M$$

अर्थात्

(C) $$(1-h)\,d(u_n, u, a) < (2+2h)\,\epsilon/M;$$

या

$$d(u_n, u, a)$$

$$< hd(u, Su_n, a)+2\,\epsilon/M$$

$$\leqslant h]d(S_nu_n, Su_n, a)+d(S_nu_n, Su_n, u)$$

$$+d(u_n, u, a)]+2\,\epsilon/M$$

अर्थात्

(D) $$(1-h)\,d(u_n, u, a) < (2+2h)\,\epsilon/M.$$

इस प्रकार (A)—(D) प्रत्येक स्थिति में, X के प्रत्येक a के लिए तथा समस्त $n \geqslant N$ के लिए

$$d(u_n, u, a) < \epsilon$$

इस प्रकार $u_n \to u$ सिद्ध होता है।

उपप्रमेय 1 : मान लें 2-दूरीक समष्टि X पर P_n, Q_n, S_n और T_n स्व-चित्रण हैं और $u_n(n=1, 2, ...)$ उनका उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है। मान लें अनुक्रम $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$, $\{S_n\}$ और $\{T_n\}$ X में क्रमशः स्व-प्रतिचित्रणों P, Q, S और T पर एकसमान रूप से अभिसरित होते हैं। यदि u प्रतिचित्रणों P, Q, S और T का उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु हो तथा

$$d(Px, Qy, a) \tag{1a}$$

$\leqslant h$ अधिकतम $\{d(Sx, Ty, a), d(Px, Sx, a), d(Qy, Ty, a), \frac{1}{2}[d(Px, Ty, a)+d(Qy, Sx, a)]\}$.

X के समस्त x, y, a के लिये जबकि $h \in (0, 1)$ सन्तुष्ट हो, तब $u_n \to u$.

उपपत्ति : क्योंकि प्रतिचित्रण P, Q, S, T जो (1a) को सन्तुष्ट करते हैं वे (1) को भी सन्तुष्ट करते हैं अतः प्रमेय 1 से उपपत्ति पूर्ण हुई ।

प्रमेय 2 : मान लें (X, d) पर P_n, Q_n, S_n व $T_n(n=1, 2, \ldots)$ ऐसे स्व-प्रतिचित्रण हैं कि उनके उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु $u_n(n=1, 2, \ldots)$ का अस्तित्व है तथा d संतत है । मान लें X पर स्व-प्रतिचित्रण P, Q, S और T अनुक्रमों $\{P_n\}, \{Q_n\}, \{S_n\}$ व $\{T_n\}$ की क्रमशः बिन्दुशः सीमा हैं । यदि u प्रतिचित्रणों P, Q, S और T का उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु हो, तथा

$$d(P_n x, Q_n y, a) \tag{2}$$

$$\leqslant h \text{ अधिकतम } \{d(S_n x, T_n y, a), d(P_n x, S_n x, a), d(Q_n y, T_n y, a)\ d(P_n x, T_n y, a), d(Q_n y, S_n x, a)\}$$

X के समस्त x, y, a के लिए जबकि $h \in (0, 1)$ सन्तुष्ट हो, तब $u_n \to u$.

उपपत्ति : सिंह-राम [प्रमेय 2][14] व [प्रमेय 2][15] की उपपत्ति का अनुसरण करके उपपत्ति पूर्ण हो सकती है ।

उपप्रमेय 2 : प्रमेय 2 प्रतिचित्रण शर्त (2) को (2a) से प्रतिस्थापित करने पर भी सत्य रहती है ।

$$d(P_n x, Q_n y, a) \tag{2a}$$

$$\leqslant h \text{ अधिकतम } \{d(S_n x, T_n y, a), d(P_n x, S_n x, a), d(Q_n y, T_n y, a), \tfrac{1}{2}[d(P_n x, T_n y, a) + d(Q_n y, S_n x, a)]\}$$

उपपत्ति : क्योंकि प्रतिचित्रण P, Q, S, T जो (2a) को सन्तुष्ट करते हैं वे (2) को भी सन्तुष्ट करते हैं । अतः प्रमेय 2 से उपपत्ति पूर्ण हुई ।

3. टिप्पणियाँ

1. उपप्रमेय 1 में $S=T$ लेने पर सिंह-राम द्वारा स्थापित प्रमेय 1 प्राप्त हो जाता है ।[14]
2. उपप्रमेय 2 में $S=T$ लेने पर सिंह-राम द्वारा स्थापित प्रमेय 2 प्राप्त हो जाता है ।[14]
3. उपप्रमेय 2 में $P=Q$ लेने पर सिंह-राम द्वारा स्थापित प्रमेय 1 प्राप्त हो जाता है ।[15]
4. उपप्रमेय 2 में $P=Q$ लेने पर सिंह-राम द्वारा स्थापित प्रमेय 2 प्राप्त हो जाता है ।[15]
5. 2-दूरीक समष्टि पर रोअड्स्[3] व सिंह[10] द्वारा प्राप्त किये अभिसरण परिणाम प्रमेयों 1-2 से उपप्रमेय के रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं ।

6. चूंकि प्रमेय 2 व उपप्रमेय 2 में d संतत है, n को अनन्त लेने पर शर्तों (2) व (2a) से यह स्पष्ट हो जाता है कि P, Q, S व T भी (1) व (1a) को सन्तुष्ट करते हैं। शर्तों (1) व (1a) अधीन P, Q, S व T के उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु के अस्तित्व के सम्बन्ध में अध्ययन किया गया है।

निर्देश

1. आचार्य, एस० पी०, Mat. Vesnik. 1976, **13**(28), 131-141.
2. बोन्साल, एफ० एफ०, Lecture on some fixed point theoremes of functional analysis, T. I. F. R. Bombay, 1962.
3. इस्ट्राटेस्कु वी० आई०, D. Ridel Publ. Co. Holland, 1981.
4. खान, एस० एन०, Indian J. Pure Appl. Math., 1979, **10**, 1062-1067.
5. मिश्रा, एस० एन०, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 1975-76, **3**, 405-41
6. नेड़लर, एस० बी०, Pacific J. Math. 1968, **27**(3), 579-585.
7. पंत, बी० डी०, डी० फिल थिसिस, गढ़वाल विश्वविद्यालय, श्रीनगर 1984
8. रोअडस, बी० ई०, Math. Nachr. 1979, **91**, 151-156.
9. सिंह, श्यामलाल, Arch. Math. (Brno.) 1979, **15**(1), 35-38.
10. वही, Math. Sem. Notes Robe Univ. 1979, **7**, 1-11.
11. सिंह, श्यामलाल तथा कुलश्रेष्ठ, चित्रा, Math. Edu. (Siwan) 1981, **15**, 455-60.
12. वही, Indian J. Phy. Natur. Sci. 1983, **3B**, 5-10.
13. सिंह, श्यामलाल तथा पंत, बी० डी०, Honam Math. J. 1984, **6**, 1-12.
14. सिंह, श्यामलाल तथा राम, बी०, Math. Sem. Notes Kobe Uuiv. 1981, **9**, 181-185.
15. वही, J. Univ. Kuwait (Science), 1983, **10**, 31-35.
16. सिंह, एस० पी०, Lecture notes on fixed point theorem in metric and Banach spaces, Mat science, Madras, 1974.

Vjnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 35, No. 2, 1992

प्रदूषण मानीटरन में वोल्टधारामिति का उपयोग

आर० सी० कपूर
प्लाट 4A, 8 रेजिडेन्सी, रोड जोधपुर

[प्राप्त—फरवरी 25, 1992)

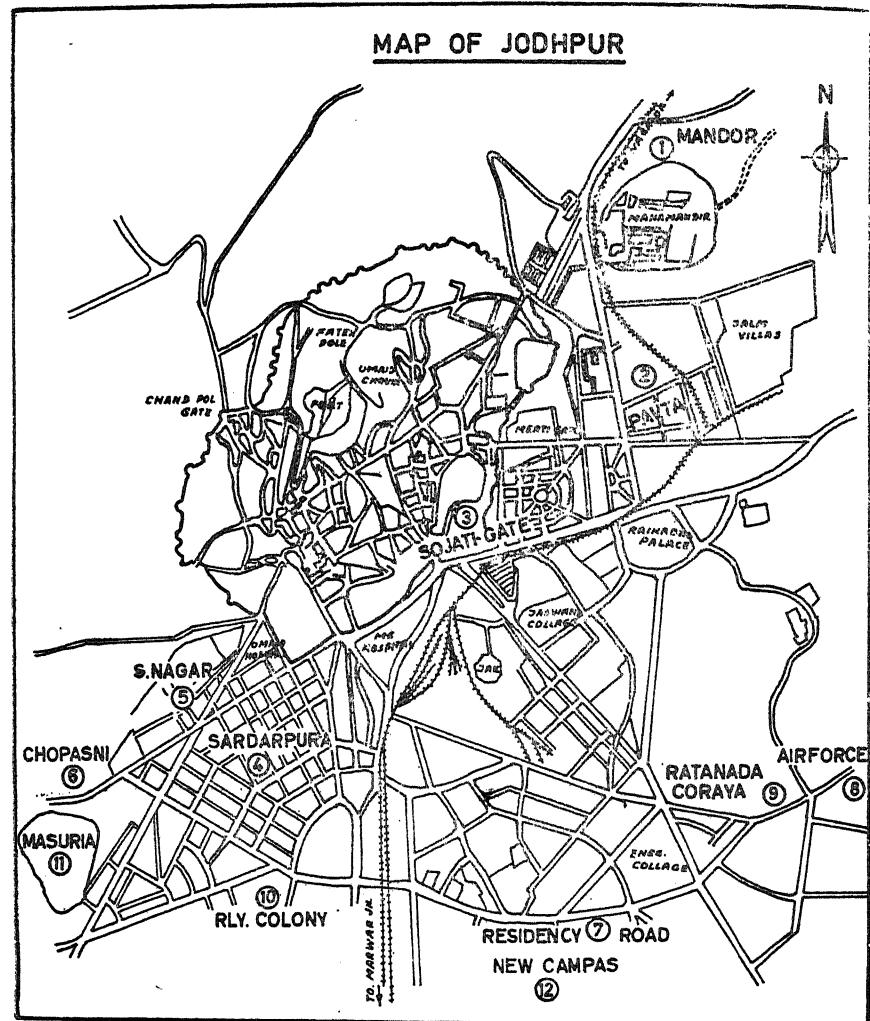
सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य जोधपुर शहर के विभिन्न जल स्रोतों में विविध प्रदूषकों की प्रकृति एवं उनकी सान्द्रता का मानीटरन सम्पन्न करना था। इसके साथ ही यह परीक्षण करना आवश्यक जान पड़ा कि कहीं इस क्षेत्र का भौम जलस्तर तो प्रदूषित नहीं हो रहा। इसके लिये वोल्टधारामिति प्रविधि का उपयोग हुआ है।

Abstract

Voltammetry in pollution monitoring at Jodhpur, *By* R. C. Kapoor, Retired Professor of Chemistry, University of Jodhpur, Jodhpur.

The objective of the present study was to monitor the nature and concentration of various pollutants in different sources of water at Jodhp ur. It was also necessary to examine whether the groundwater-table of the area was being polluted by this source. Voltammetry technique has been used for the purpose.

जोधपुर शहर राजस्थान प्रदेश के पश्चिमी भाग में स्थित है जो शुष्क है और जहाँ समय-समय पर जल का अभाव होता रहता है। हाल ही में इस क्षेत्र में अनेक लघु उद्योगों की स्थापना की गई है। इन उद्योगों में मुख्य हैं—वस्त्र उद्योग, रंगाई उद्योग, छपाई उद्योग, धातु उद्योग तथा गोंद उद्योग जिनमें प्रचुर मात्रा में जल की आवश्यकता पड़ती है और यह जल अन्त में अपशिष्ट के रूप में तिरस्कृत कर दिया जाता है। इस अपशिष्ट जल में कार्बनिक तथा अकार्बनिक दोनों ही प्रकार के प्रदूषणकारी अवयव पाये जाते हैं। तिरस्कृत जल को खुली नालियों में से होकर बहने दिया जाता है जो शहर के बाहर की भूमि में फैल जाता है। मिट्टी के सरंध्र होने के कारण यह तिरस्कृत जल मिट्टी में से होकर रिसता है

चित्र 1 : जोधपुर का मानचित्र

और धीरे-धीरे भौम जल की गुणवत्ता को प्रभावित करता है। फलतः अपशिष्ट जल के साथ-साथ शहर के पेय जल तथा भौम जल का तुलनात्मक भौत-रासायनिक अध्ययन करना वांछनीय समझा गया। प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य जल के विभिन्न स्रोतों में विविध प्रदूषकों की प्रकृति तथा उनकी सान्द्रता का मानीटरन सम्पन्न करना था। साथ ही, यह भी आवश्यक समझा गया कि इस स्रोत द्वारा प्रदूषित होने वाले इस के क्षेत्र के भौम जल स्तर का परीक्षण किया जाय।

जोधपुर में चार मुख्य औद्योगिक क्षेत्र हैं।

(1) भारी उद्योग वाले क्षेत्र—इसमें इंजीनियरी, इस्पात, अलौह धातुयें तथा ऊनी उद्योग सम्मिलित हैं।

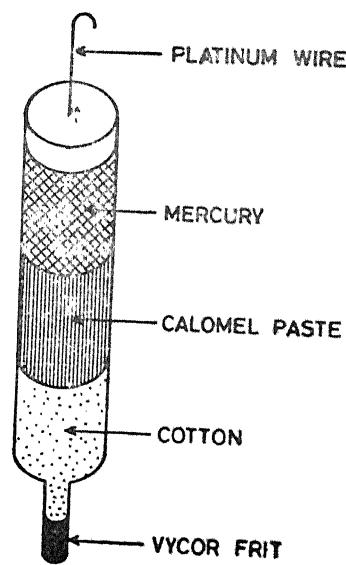
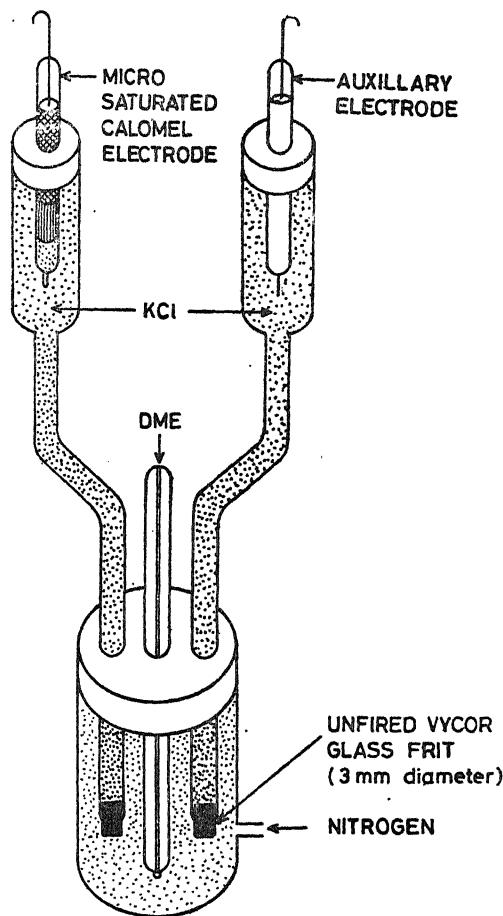
(2) मरुधर प्रावस्था I—चूना तथा सीमेन्ट उद्योग।

(3) मरुधर प्रावस्था II—वस्त्र उद्योग, विरंजन तथा रसायन उद्योग।

(4) शास्त्री नगर—रंगाई तथा छपाई उद्योग।

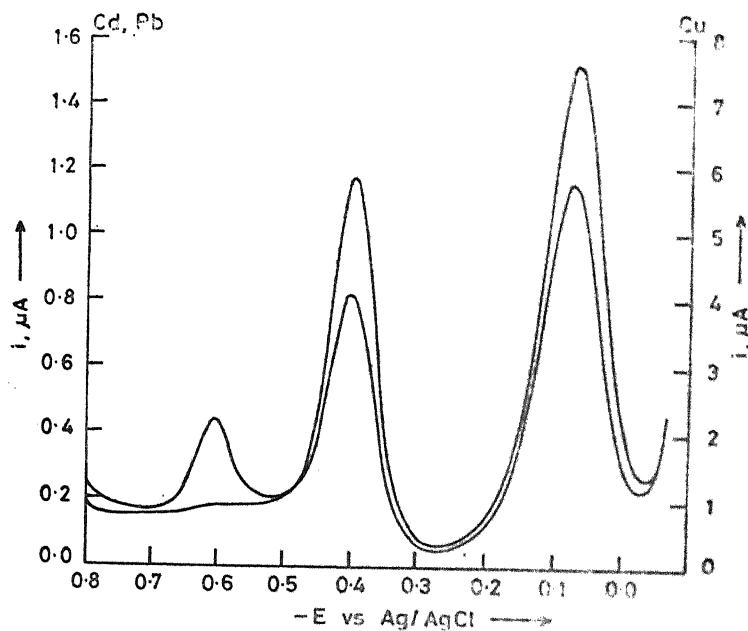
चित्र 1 में जोधपुर का मानचित्र दिया हुआ है जिसके अवलोकन से उद्योगों के वितरण का पैटर्न एवं शहर से होकर अपशिष्ट जल के बहाव के टेढ़े-मेढ़े मार्ग का कुछ अनुमान लग सकेगा। यह मार्ग विशाल भूमि क्षेत्र से होकर गुजरता है जिसकी मिट्टी अत्यन्त रिसावयुक्त है।

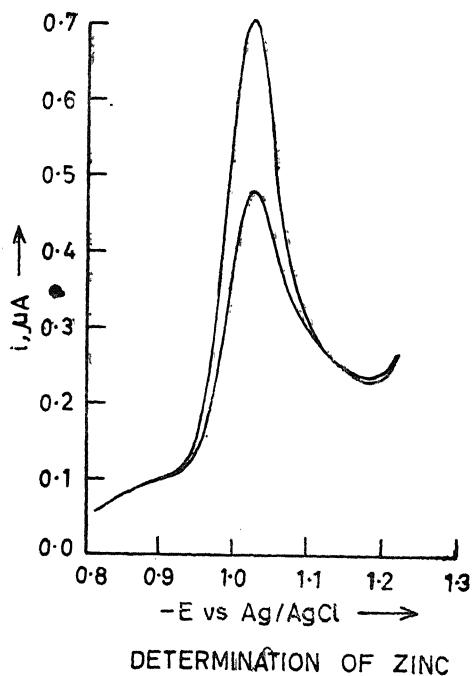
प्रयोगात्मक

उद्योगों से निकले अपशिष्ट जल में प्रदूषकों के निर्धारण के लिए वोल्टधारामिति विधियों का सम्प्रयोग किया गया। इस हेतु PAR 174A पोलैरोग्राफीय विश्लेषक प्रयुक्त हुआ जिसमें 303 स्थैतिक पारद बिन्दु इलेक्ट्रोड (SMDE) का उपयोग हुआ। एक सूक्ष्म संतृप्त कैलोमेल इलेक्ट्रोड संविरचित किया गया जिसका सेट-अप (व्यवस्थापन) चित्र 2 में प्रदर्शित है। जिन प्रविधियों का प्रयोग हुआ वे थीं dc, cv, dpp तथा dpasv। चित्र 3 में आरेख के रूप में सम्पूर्ण संविरचित सेट-अप प्रदर्शित है।

चित्र 2 : सूक्ष्म सैतृप्त कैलोमेल इलेक्ट्रोड (SMDE)

चित्र 3 : वोल्टधारामितीय संविरचन (सेटअप)

वोल्टधारामिति प्रविधियों में यह क्षमता होती है कि वे उन प्रजातियों (species) का निर्धारण तथा उनकी मात्रा का निश्चयन कर सकती हैं जो इलेक्ट्रोड तथा विलायक के कार्यकारी विभव परास में आक्सीकृत या अपचित हो सकती हैं। फलतः इस अध्ययन में केवल उन्हीं आयनों तक अपने को सीमित रखा गया जो इस कसौटी को पूरा करते हैं। प्रारम्भ में केवल कुछेक आयनों को चुना गया। किन्तु बाद में ज्यों-ज्यों अधिक आयनों के निर्धारण की परिस्थितियों का मानकीकरण सम्पन्न होता गया त्यों-त्यों अधिक आयनों को सम्मिलित कर लिया गया। प्रारम्भ में जिन आयनों को चुना गया वे थे कैडमियम, कापर, क्रोमियम, आयरन, लेड तथा जिंक। यह उल्लेखनीय है कि ये आयन वे हैं जो सामान्यतः अपशिष्ट जल में पाये जाते हैं और सजीव प्राणियों के लिये अत्यधिक विषैले माने जाते हैं। उदाहरणार्थ, कैडमियम ऐसा

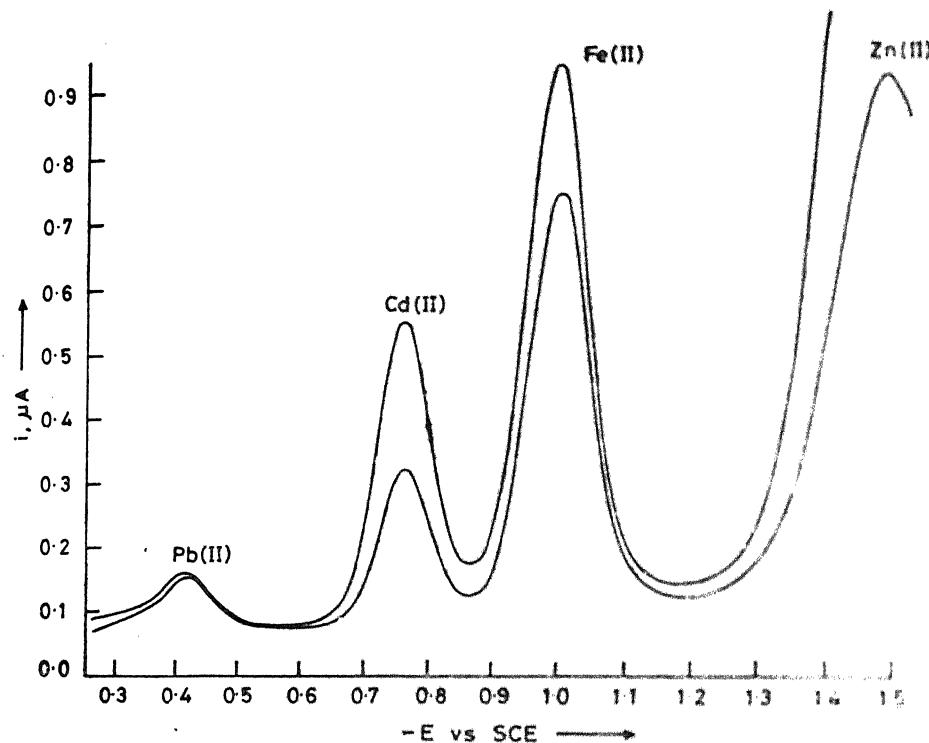
ही आयन है। इसकी विषाक्तता सुविख्यात है किन्तु इसका मात्रात्मक निर्धारण कठिन माना जाता था और सूक्ष्म मात्रा में इसकी पहचान दीर्घकाल से समस्या बनी हुई थी। इसके निर्धारण के लिए वोल्ट धारामिति प्रविधि आदर्श सिद्ध हुई है।

यहाँ पर dpp तथा dpasv का उल्लेख विशेष रूप से किया जा सकता है। dpp में संकेत (सिग्नल) शिखर (पीक) बन जाता है जिसकी पहचान करना तथा मात्रात्मक निर्धारण dc पोलैरोग्राफी के प्लेटों की अपेक्षा सुगम है। यही नहीं, संकेत की तुलना में आवेशकारी धारा का रव प्रभावशाली ढंग से कम हो जाता है। dpasv में सूक्ष्म-प्रजातियाँ इलेक्ट्रोड के चारों ओर पूर्व विद्युत अपघटन द्वारा सान्द्रित हो जाती हैं। इस तरह इसके परवर्ती विलीनीकरण से संकेत काफी अभिवृद्ध हो जाता है। चित्र 4 में आयनों के मिश्रण के निर्लेपन वोल्टधारामिति प्रयोग के परिणाम प्रदर्शित हैं जिनमें उनके लक्षणों

चित्र 4 : कैडमियम, लेड तथा कापर आयनों की निर्लेपन वोल्टधारामिति

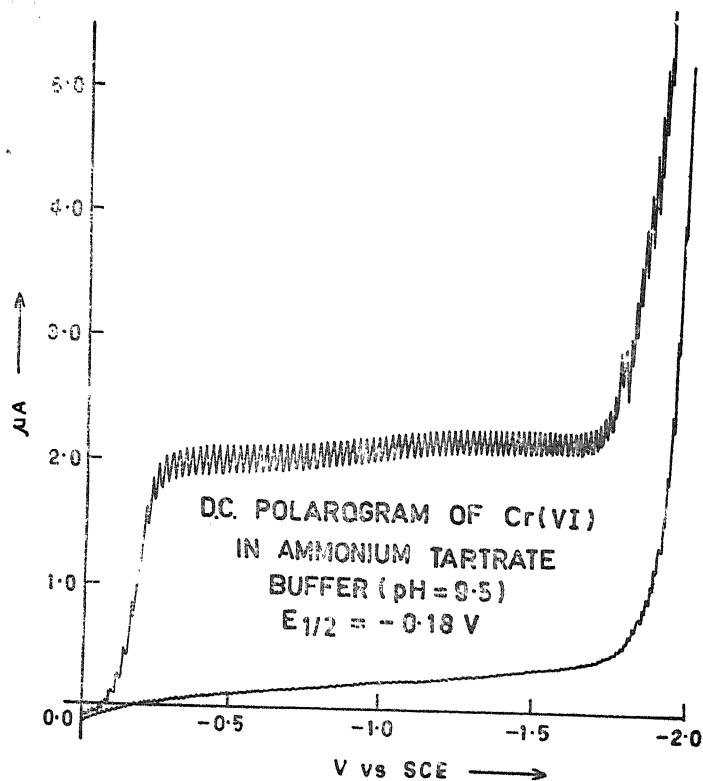
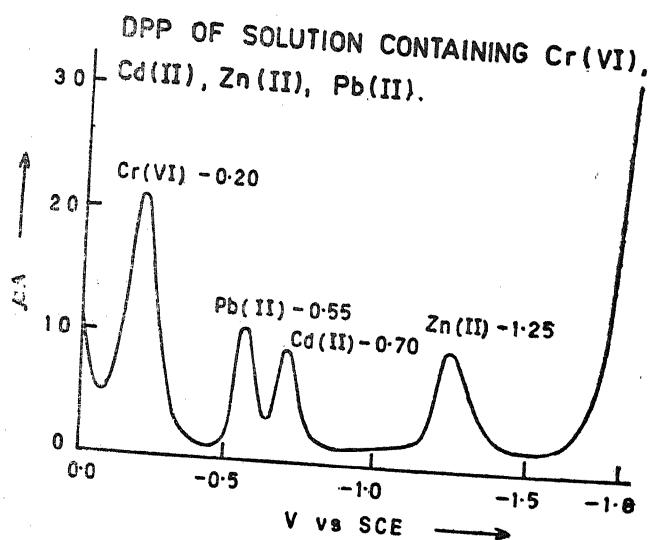
ज्ञात करने के लिये dpp प्रविधि इस्तेमाल की गई। Cd, Pb तथा Cu इन तीन आयनों के मिश्रण हर एक को सरलता से पहचाना जा सकता है। इस तरह इन तीनों को पृथक करने की कठिन विधि अपनाये बिना ही मिश्रण में इन आयनों का निर्धारण किया जा सकता है। अपशिष्ट जल के विश्लेषण के लिये हमने ऐसा ही किया। चित्र 5 में कुछ प्रयोग किये गये जिनमें ज्ञात Zn नमूनों में dpp विधि सम्प्रयुक्त की गई। अंशांकन वक्र बनाकर यह पाया गया कि शिखर की ऊँचाई सान्द्रता के समानुपाती थी। यह उल्लेखनीय है कि जिंक का निर्धारण पृथक से करना पड़ा क्योंकि यदि नमूने में ताम्र रहता है तो PASV प्रविधि से गलत परिणाम प्राप्त होते हैं।

चित्र5 : जिंक की डिफरेंशियल पल्स पोलैरोग्राफी (dpp)

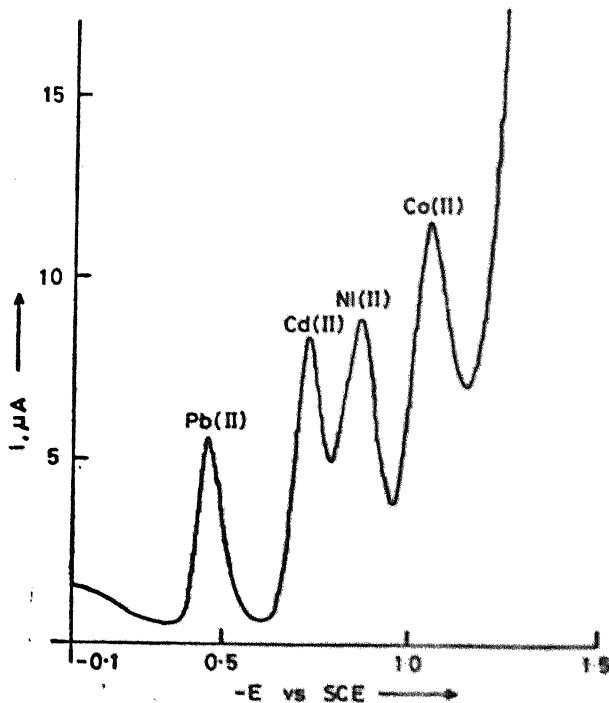
लोह् के निर्धारण में विकट समस्या उत्पन्न हुई क्योंकि असन्तुलित लोह् का उपापचय (रिडॉक्स) विभव अत्यन्त धनात्मक है—पारद के आक्सीकरण विभव से अधिक धनात्मक । इस तरह पारद इलेक्ट्रो Fe(III) के अपचयन तरंग को प्रदर्शित नहीं कर सकता । परीक्षण द्वारा यह पाया गया कि ट्राइएथेनाल-ऐमीन लोह् को प्रबलता से संकुलित कर लेता है जिससे इसका उपापचय विभव प्रचुर ऋणात्मक मान की ओर सरक जाता है। यह रोचक प्रेक्षण था कि लोह् तरंग का अर्धतरंग विभव लिगैंड मिलाने पर अपरिवर्तित रहा आया । लाग-प्लाट विश्लेषण से पता चला कि यह 1-इलेक्ट्रान उत्क्रमणीय अपचयन है। चक्रिक वोल्टधारामिति से भी इस निष्कर्ष की पुष्टि हुई है। हमने यह भी देखा कि ट्राइएथेनाल ऐमीन में Fe(III) के dpp से −1.0 V क्षेत्र ने एक शिखर प्राप्त हुआ जो Pb, Cd तथा Zn के शिखरों से पर्याप्त हटकर था । इस नवीन खोज से चार आयनों का निर्धारण उनके एकसाथ उपस्थित होने पर dpp प्रविधि से सम्भव हो सका । चित्र 6 में एक मिश्रण में उपस्थित Pb, Cd, Fe तथा Zn का dpp वक्र प्रदर्शित हैं। हमें शहर के विभिन्न जल नमूनों में भी लोह् निर्धारण करने में सफलता प्राप्त हुई।

क्रोमियम का निर्धारण +6 अवस्था में वोल्टधारामिति द्वारा किया गया । चित्र 7 में अमोनियम टार्टरेट बफर में dc पोलैरोग्राम प्रदर्शित है। चक्रिक वोल्टधाराग्राम से यह पूर्णत: अनुत्क्रमणीय दिखता है क्योंकि प्रयुक्त विभव परास में कोई उत्क्रमण शिखर नहीं देखा जाता । इस तरह Cr(VI) को अलग

से तथा Pb, Cd एवं Zn के मिश्रण में भी ज्ञात किया जा सका। चित्र 8 में मिश्रण के dpp द्वारा यह प्रदर्शित है।

चित्र 6 : लेड, कैडमियम, आयरन तथा जिंक आयनों के मिश्रण की dpp

Ni तथा Co का निर्धारण विभिन्न माध्यमों तथा पी-एच अवस्थाओं में उनके आचरण से संभव हो सका। ऐसा पाया गया कि फ्यूरिल्डी आक्सीम की उपस्थिति में अमोनिया बफर (पी एच 9) में इष्टतम परिणाम प्राप्त हुए। इन अवस्थाओं में Pb तथा Cd जैसे सामान्य आयनों का अतिक्रमण नहीं होता। चित्र 9 में मिश्रण में Pb, Cd, Ni तथा Co आयनों का DPP दिखलाया गया है।

As(III) का निर्धारण 0·1 M सोडियम आक्सैलेट में किया गया जिसमें अर्धतरंग विभव −1.14 N VS SCE के साथ विसरण नियन्त्रित तरंग प्राप्त हुई। DPP से भी उसी विभव पर तीक्ष्ण शिखर मिला। चक्रिक वोल्टधारामिति अपचयन प्रक्रम की उत्क्रमणीय प्रकृति को सूचित करती है। यह विधि जल में As(III) ज्ञात करने में उपयोगी सिद्ध हुई क्योंकि +3 अवस्था में As अधिक विषैला है। As(V) अक्रिय होता है अतएव As(III) में अपचित करने के बाद ही निश्चित किया जा सकता है। इस तरह DPP प्रविधि द्वारा +3 तथा +5 As दोनों ही ज्ञात किये जा सकते हैं। गोरखपुर

चित्र 7 : Cr(VI) की DC पोलैरोग्राफी

चित्र 8 : Cr, Cd, Zn तथा Pb आयनों से युक्त विलयन की dpp

के औद्योगिक अपशिष्ट जल में As (III) तथा As(V) दोनों ही ज्ञात किये गये हैं । इनमें कुल आर्सेनिक मात्रा 12 से 40 माइक्रोग्राम प्रति लीटर के मध्य पाई गई ।

चित्र 9 : Pb, Cd, Ni तथा Co आयनों के मिश्रण की dpp

उद्योगों से निःसृत जल की गुणवत्ता सुधारने के लिए कुछ उपाय भी किये गये । जोधपुर में गुआर (Guar) सरलता से उपलब्ध उत्पाद है और यहीं गुआर गोंद तैयार करने का उद्योग फलफूल रहा है । इस गोंद को परिष्कृत करके ऐलम सल्फेट के साथ स्कन्दक के रूप में प्रयुक्त किया गया । इससे प्रकाशिक घनत्व (OD) तथा COD दोनों ही घट गये । बाद में स्तम्भ प्रयोग भी किये गये हैं । आँकड़ों से प्रकट हुआ है कि अपशिष्ट जल को सुधार कर कृषिकार्यों में प्रयुक्त होने के योग्य बनाया जा सकता है ।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 35, No. 2, 1992

किसी फलन का उसके नार्लुण्ड माध्यों द्वारा सन्निकटन की कोटि के विषय में

आशुतोष पाठक तथा वीरेन्द्र गुप्त
गणित अध्ययनशाला, विक्रमविश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—नवम्बर 24, 1990]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में एक सन्निकटन की कोटि के विषय में एक प्रमेय सिद्ध की जावेगी जो अन्य ज्ञात परिणामों की अपेक्षा अधिक उत्तम है।

Abstract

On the degree of approximation of a function by its Norlund means, *By* Ashutosh Pathak and Virendra Gupta, School of Studies in Maths., Vikram University, Ujjain (M. P.).

In the present note we prove a theorem on the degree of approximation which is better than the other known result in this line.

1. परिभाषा (गास[2]) : श्रेणी Σan आंशिक योगफलों $\{S_n\}$ के अनुक्रम के साथ नार्लुण्ड माध्यों $(N,\overset{\alpha}{p_n})\alpha \geqslant 1$ के द्वारा S तक संकलनीय है यदि

$$\lim \overset{\alpha}{t_n} \rightarrow S, \text{ ज्यों ज्यों } n \rightarrow \infty \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\overset{\alpha}{t_n} = \frac{1}{\overset{\alpha}{P_n}} \sum_{v=0}^{n} \overset{\alpha}{p}_{n-v} \; S_v \tag{1.2}$$

$$p_n^{\alpha} = \sum_{v=0}^{n} p_v^{\alpha} \tag{1.3}$$

तथा

$p_n > 0$, समस्त $n \geqslant 0$ के लिए

$\alpha = 1$ के लिए यह विधि संकलन की (N, p_n) विधि में समानीत हो जाती है। यदि $p_n = \frac{1}{n+1}$, तो विधि (N, p_n) विदित हार्मोनिक संकलनीयता $\left(N, \frac{1}{n+1}\right)$ बन जाती है।

यही नहीं, चूंकि
$$p_n = \binom{n+\delta-1}{\delta-1}, \ \delta > 0 \tag{1.4}$$

अतएव उपर्युक्त विधि (c, δ) माध्यमों में समानीत हो जाती है।

2. माना कि $f(x)$ एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्त 2π है और लेवेस्क अर्थ में अन्तराल $[-\pi, \pi]$ में समाकलनीय है।

इस फलन से सम्बद्ध फूरिये श्रेणी निम्नवत् है—

$$f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.1}$$

जहाँ

$a_n, b_n, n = 1, 2 \ldots\ldots,$

$f(x)$ के फूरियर त्रिकोणमितीय गुणांक हैं।

हम लिखेंगे कि

$$\phi(t) = \phi(x, t) = f(x, t) + f(x - t) - 2f(x) \tag{2.2}$$

$$\phi(t) = \int_0^t |\phi(u)| \, du \tag{2.3}$$

$$p(1/t) = p_t \tag{2.4}$$

जहाँ τ सूचित करता है $1/t$ के समाकलनीय अंश को।

फलन $f(x) \epsilon$ lip α, $0<\alpha<1$, के संगत फूरियर श्रेणी के विषय में लोरेंज ने निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त किया है—

प्रमेय A : यदि $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx,$

जहाँ $a_n \downarrow 0$ तो

$$f(x) \epsilon \text{ lip } \alpha, 0<\alpha<1,$$

यह अनिवार्य तथा पर्याप्त है कि

$$a_n=0\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \tag{2.5}$$

स्पष्ट है कि यह $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ के लिए भी वैध है। गास[2] ने इस प्रमेय का सार्वीकरण निम्न रूप में किया है—

प्रमेय B : माना कि $a_n>0$, तथा a_n फूरियर साइन या कोसाइन गुणांक हैं f के तब $f \epsilon$ lip α, के लिए $0<\alpha<1$, (2.6)

यदि $\sum_{k=1}^{n} a_n=0\ (n^{-\alpha})$ या उसके ही समतुल्य

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k=0\ (n^{-1-\alpha}) \tag{2.7}$$

यह देखना आसान है कि $a_n \downarrow 0$ तो प्रतिबन्ध (2.5), (2.6) एवं (2.7) समतुल्य है।

फ्लेट[2] ने किसी फलन के सन्निकटन की कोटि के विषय में निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध किया है।

प्रमेय C : माना $0<\alpha<1, 0<\delta<\pi$, यदि x ऐसा बिन्दु है कि

$$\int_0^t |d\phi(u)|<At^{\alpha}, \text{ for } 0\leqslant t<\leqslant\delta$$

तो

$$\overset{\alpha}{\sigma_n}(x)-f(x)=0\ (n^{-\alpha}) \tag{2.8}$$

हाल ही में सिद्दीकी[6] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है जो फ्लेट के परिणाम को सार्वीकृत करता है।

प्रमेय D : माना कि $\{p_n\}$ एक ऐसा अवर्धमान अनुक्रम है असली संख्याओं का कि

$$\int_t^{\xi} F_n(u)du=0\left[\frac{p(1/t)}{n}\right], \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant\xi \tag{2.9}$$

जहाँ $F_n(t)=I_m\{e^{i(n+1/2)t}+\sum_{v=0}^{n} p_v e^{-ivt}\}$

साथ ही, माना $0<\alpha<1, 0<\delta\leqslant\pi$, तथा यदि x ऐसा बिन्दु है कि

$$\int_0^t |d\phi(u)| \leqslant At^{\alpha} \tag{2.10}$$

जहाँ $0\leqslant t\leqslant\delta$ तो

$$\sigma_n(x)-f(x)=0\ (P_n-\alpha)+0\ [1/p_n] \tag{2.11}$$

इस परिणाम में संशोधन करके पोरवाल ने[5] इससे अच्छा सिद्दिकी[6] का परिणाम प्राप्त किया। उसने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की—

प्रमेय E : यदि $$\psi(x,t)=\int_t^{\delta} |\phi(u)|\ \frac{p(1/u)}{u}\ du=0(1) \tag{2.12}$$

जहाँ $\{p_n\}$ धनात्मक तथा अवर्धमान अनुक्रम है वास्तविक संख्याओं का।

तो $$t_n(x)-f(x)=0\left(\frac{1}{p_n}\right) \tag{2.13}$$

x में समान रूप से लागू होता है।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करेंगे जो पोखाल[5] के प्रमेय को सार्वीकरण करता है।

हम निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय :

यदि
$$\psi(x,t)=\int_t^\delta |\phi(u)| \frac{\overset{\alpha}{p}_{(1/u)}}{u}\, du=0(1) \tag{2.14}$$

जहाँ $\{p^{\alpha}\}$ एक धनात्मक तथा अवर्धमान अनुक्रम है असली अंकों का, तो

$$\overset{\alpha}{t_n}(x)-f(x)=0\left[\frac{1}{\overset{\alpha}{p_n}}\right] \text{ जहाँ } \alpha>-1$$

$\alpha=1$ के लिए उपर्युक्त प्रमेय पोरवाल[5] का प्रमेय है।

4. इस प्रमेय की उपपत्ति निम्नलिखित प्रमेयिकाओं पर आधारित है—

प्रमेयिका 1. यदि $\left\{\overset{\alpha}{p_n}\right\}$ अनृण हैं तथा अवर्धमान अनुक्रम हो तो $0\leqslant a\leqslant b\leqslant\infty, 0\leqslant t\leqslant\pi,$

तथा किसी n के लिए

$$\left|\sum_{k=a}^{b} \overset{\alpha}{p_k} e^{i(n-k)t}\right|<k\overset{\alpha}{p}_{(1/t)}$$

जहाँ k परम नियतांक है। प्रमेयिका की उपपत्ति मोकफैडेन[3] के अनुसार है।

प्रमेयिका 2 : यदि $\left\{\overset{\alpha}{p_n}\right\}$ अनृण तथा अवर्धमान अनुक्रम हो तो $1/n\leqslant t\leqslant\delta<\pi,$

के लिए

$$|K_n(t)|=\left|\sum_{k=0}^{n} \overset{\alpha}{p_k}\frac{\sin(n-k+1/2)}{\sin t/2}\right|$$

$$=0[t^{-1}\overset{\alpha}{p}_{(1/t)}]$$

उपपत्ति के लिए देखें पाण्डेय[4]।

प्रमेय की उपपत्ति :—यह सुविदित है कि

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\phi(t)\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin 1/2t}\,dt$$

जहाँ $S_n(x)$ सूचक है श्रेणी (2.1) के n वें आंशिक योग का जो इस तरह है

$$f(x)\sim 1/2a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

अब $\left(N, p_n^{\alpha}\right)$ माध्य की परिभाषा से

$$t_n^{\alpha}-f(x)=\frac{1}{p_n^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}p_k^{\alpha}\,S_{n-k}(x)-f(x)$$

$$=\frac{1}{p_n^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}p_k^{\alpha}\,[S_{n-k}(x)-F(x)]$$

$$=\frac{1}{2\pi p_n^{\alpha}}\int_0^{\pi}\phi(t)\sum_{k=0}^{n}p_k^{\alpha}\frac{\sin(n-k+1/2)t}{\sin 1/2\,t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi p_n^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\pi}\phi(t)p_k^{\alpha}\frac{\sin(n-k+1/2)t}{\sin 1/2\,t}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}\phi(t)K_n(t)\,dt$$

$$K_n(t)=\frac{1}{2\pi p^{n^{\alpha}}}\sum_{k=0}^{n}p_k^{\alpha}\frac{\sin(n-k+1/2)t}{\sin 1/2t}$$

हम लेंगे

$$I=\int_0^{\pi} \phi(t)K_n(t)\,dt$$

$$=\left[\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right] \phi(t)K_n(t)dt,\ 0<\delta<\pi$$

$$=I_1+I_2+I_3 \text{ (माना)}$$

अब $\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant\delta$ के लिए

$$K_n(t)=\frac{1}{\pi \overset{\alpha}{p_n}}\ 0\left[\sum_{k=0}^{n} \overset{\alpha}{p_k} \frac{\sin (n+k+1/2)t}{\sin 1/2t}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi \overset{\alpha}{p_n}}\ 0\left[t^{-1}\ \overset{\alpha}{p}_{(1/t)}\right]$$

$$=0\left[\frac{p(1/t)}{t\overset{\alpha}{p_n}}\right] \text{ (प्रमेयिका 2 द्वारा)}$$

इसलिए

$$I_2=0\left(\int_{1/n}^{\delta} \frac{|\phi(u)|}{u}\ \frac{\overset{\alpha}{p}_{(1/u)}}{\overset{\alpha}{p_n}}\,du\right)$$

$$=0\left(\frac{1}{\overset{\alpha}{p_n}}\right) \text{ (परिकल्पना 2.14 से)} \qquad (4.2)$$

यही नहीं, रीमान-लेबेस्क प्रमेय के बल पर तथा नियमितता प्रतिबन्धों के अनुसार हमें निम्न की प्राप्ति होती है

$$I_3=0\left(\frac{1}{\overset{\alpha}{p_n}}\right) \qquad (4.3)$$

साथ ही, प्रतिबन्ध

$$\phi(u)=\int_{1/n}^{\delta}\frac{\phi(u)}{u}\ \overset{\alpha}{p}_{(1/u)}=0(1)$$

का अर्थ है कि

$$\psi(t) = \int_0^t |\phi(u)| du$$

$$= 0\left(\frac{t}{\overset{\alpha}{p}_{(1/t)}}\right)$$

माना

$$\frac{\phi(u)}{u} \overset{\alpha}{p}_{(1/u)} = \phi(u)$$

क्योंकि

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{u}{\overset{\alpha}{p}_{(1/u)}} \frac{\left\{(u)\overset{\alpha}{p}_{(1/u)}\right\}}{u} du$$

$$= \int_0^t \frac{u}{\overset{\alpha}{p}_{(1/u)}} \frac{\phi(u)}{u} \overset{\alpha}{p}_{(1/u)} du$$

खण्डशः समाकलन करने पर

$$(t) = p_{(1/t)}[-u\phi(u)]^t + \int_0^t \phi(u) \left\{\frac{d}{du}\left[u / \overset{\alpha}{p}_{(1/u)}\right]\right\} du$$

$$= 0\left[\frac{t}{\overset{\alpha}{p}_{(1/t)}}\right] + 0(1)\left[\frac{t}{\overset{\alpha}{p}_{(1/t)}}\right]$$

$$= \left[\frac{t}{\overset{\alpha}{p}_{(1/t)}}\right]$$

पुनः $0 \leqslant t \leqslant 1/n$, के लिए $K_n(t) = 0(n)$

अतः

$$I_1 = 0\left[\int_0^{1/n} n \frac{t}{\overset{\alpha}{p}_{(1/t)}} dt\right] = 0\left(\frac{1}{\overset{\alpha}{p}_n}\right)$$

इस तरह

$$I_1 = 0\left(\frac{1}{\overset{\alpha}{p}_n}\right) \tag{4.4}$$

लेखकों से निवेदन

1. विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिये।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अँग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सकेगी।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दूगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—

फॉवेन्स, आर० आर० और म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80।

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

10. लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबंध सम्पादक

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

सम्पादक
डा० चन्द्रिका प्रसाद
डी० फिल०

Editor
Dr. Chandrika Prasad

प्रबन्ध सम्पादक
डॉ० शिवगोपाल मिश्र,
एम० एस-सी०, डी० फिल०

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil., F. N. A. Sc.

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 30 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 8 रु० या 3 पौड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 30 *or* 12 £ *or* $ 40
Per Vol. Rs. 8 *or* 3 £ *or* $ 10

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद